1. Übung am 13. März 2017

UV Angewandte Statistik (405.330), Ass.-Prof. Dr. Wolfgang Trutschnig
Link Ankreuzliste: siehe www.trutschnig.net/courses
Mit 'F' versehene Aufgaben sind freiwillig, mit * versehene Aufgaben haben einen erhöhten Schwierigkeitsgrad.
Alle Verweise beziehen sich auf das Statistik-Skriptum.

Übungsaufgabe 1 Verwenden Sie das CLT, um ein approximatives Konfidenzintervall für den Parameter λ einer Poissonverteilung zu konstruieren.
(R): Überprüfen Sie die Güte des Konfidenzintervalls für verschiedene samples sizes n mittels Simulationen.

Übungsaufgabe 2 Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine i.i.d. Folge mit Verteilungsfunktion F, F_n bezeichne die empirische Verteilungsfunktion gemäß Gleichung (7.3). Beweisen Sie (als Anwendung des Zentralen Grenzwertsatzes) das folgende Resultat: Für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $F(x) \in (0,1)$ und beliebiges $z \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} P\Big(\big\{\omega \in \Omega : \sqrt{n}(F_n(x)(\omega) - F(x)) \leq z\big\}\Big) = \Phi\Bigg(\frac{z}{\sqrt{F(x)(1-F(x))}}\Bigg)$$

Hinweis: Für festes x mit $F(x) \in (0,1)$ erfüllen die Zufallsvariable $(\mathbf{1}_{(-\infty,x]} \circ X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ die Voraussetzungen des CLT (Satz 8.15).

Übungsaufgabe 3 Es seien $X_1, X_2, \ldots, X_n$ i.i.d. mit stetiger Verteilungsfunktion F. $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \cdots \leq X_{(n)}$ bezeichne die Ordnungsstatistik (i.e. $X_{(1)}$ bezeichne den kleinsten Wert, $X_{(2)}$ den zweitkleinsten Wert der Stichprobe, etc.). Berechnen Sie die Verteilungsfunktion $F_i := F_{X_{(i)}}$ von $X_{(i)}$ für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$.
(R): Überprüfen Sie Ihr Resultat mittels Simulationen für eine beliebiges, von Ihnen gewähltes F.

Übungsaufgabe 4 (*) Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine i.i.d. Folge mit stetiger Verteilungsfunktion F, F_n bezeichne die empirische Verteilungsfunktion gemäß Gleichung (7.3). Zeigen Sie, dass die Verteilung der Zufallsvariable D_n, definiert durch

$$D_n(\omega) = \sup_{x\in\mathbb{R}} |F_n(x)(\omega) - F(x)|$$

unabhängig von F ist.
Hinweis: Gehen Sie in zwei Schritten vor: (i) Überlegen Sie sich zuerst, dass es für die Berechnung des supremums ausreicht, sich auf Sprungstellen von F_n (welche Punkte sind das?) zu beschränken. (ii) Verwenden Sie die Integraltransformation und Übungsaufgabe 3.

Übungsaufgabe 5 Eine consulting Firma sucht neue Mitarbeiter mit Universitätsabschluss. Die Einstellungskriterien inkludieren eine Punktezahl von mindestens 120 bei einem (in der Firma zu absolvierenden) IQ-Test, wobei der IQ als $\mathcal{N}(\theta, 5^2)$-verteilt mit unbekanntem θ angenommen wird. Von 500 Bewerbern schaffen nur 50 den Test - schätzen Sie θ.
(R) Überprüfen Sie Güte des erhaltenen Schätzers mit Hilfe von Simulationen in R.