

4. Übung am 03. April 2017

UV Angewandte Statistik (405.330), Ass.-Prof. Dr. Wolfgang Trutschnig

Link Ankreuzliste: siehe www.trutschnig.net/courses

Mit 'F' versehene Aufgaben sind freiwillig, mit * versehene Aufgaben haben einen erhöhten Schwierigkeitsgrad.

Alle Verweise beziehen sich auf das Statistik-Skriptum.

Übungsaufgabe 16 Seien X_1, X_2, \dots, X_n mit $n \geq 2$ i.i.d. mit Verteilungsfunktion F . $X_{(1)}$ und $X_{(n)}$ bezeichnen den ersten und den letzten Wert der Ordnungsstatistik gemäss Aufgabe 3.

(i) Berechnen Sie die (zweidimensionale) Verteilungsfunktion $H_{1,n}$ des Vektors $(X_{(1)}, X_{(n)})$, i.e.

$$H_{1,n}(x, y) = \mathbb{P}(X_{(1)} \leq x, X_{(n)} \leq y).$$

(ii) Berechnen Sie die Dichte $h_{1,n}$ von $(X_{(1)}, X_{(n)})$ unter der Annahme, dass F absolut stetig mit Dichte f ist.

Übungsaufgabe 17 Sei $X \sim \mathcal{U}(\theta, 2\theta)$ mit $\theta > 0$. Berechnen Sie den Momentenschätzer $\hat{\theta}_n$ von θ . Ist $\hat{\theta}_n$ erwartungstreu, (stark) konsistent, effizient?

(R) Veranschaulichen Sie Ihre Resultate mit Hilfe von Simulationen in R.

Übungsaufgabe 18 Sei wiederum $X \sim \mathcal{U}(\theta, 2\theta)$ mit $\theta > 0$. Berechnen Sie den MLE $\hat{\theta}_n$ von θ und modifizieren Sie ihn so, dass der resultierende Schätzer $\hat{\psi}_n$ erwartungstreu ist.

Übungsaufgabe 19 (Fortsetzung von Aufgabe 18) Berechnen Sie die Varianz $\mathbb{V}_\theta(\hat{\psi}_n)$ von $\hat{\psi}_n$ und vergleichen Sie diese mit der Varianz des (ebenfalls erwartungstreuen) Schätzers $\hat{\varphi}_n$, definiert durch

$$\hat{\varphi}_n = \frac{1}{3}(X_{(1)} + X_{(n)}).$$

(R) Verifizieren Sie die erhaltenen Resultate mit Hilfe von Simulationen in R.

Hinweis: Verwenden Sie zur Berechnung von $\mathbb{V}_\theta(\hat{\varphi}_n)$ Aufgabe 16 (ii).

Übungsaufgabe 20 (R) Sei $X \sim Ex(\lambda)$ mit $\lambda > 0$. Finden Sie unter Zuhilfenahme der Momentenmethode einen stark konsistenten Schätzer für den Median $F^{-1}(0.5)$ von X .

(R) Veranschaulichen Sie Ihre Resultate mit Hilfe von Simulationen in R und beantworten Sie (rein durch Simulationen), ob auch der Stichprobenmedian ein guter Schätzer des Medians ist.

Hinweis: Der Stichprobenmedian kann in R wie folgt berechnet werden:

`as.numeric(quantile(x,type=1,probs=c(0.5)))`