5. Übung am 24. April 2017

UV Angewandte Statistik (405.330), Ass.-Prof. Dr. Wolfgang Trutschnig
Link Ankreuzliste: siehe www.trutschnig.net/courses
Mit 'F' versehene Aufgaben sind freiwillig, mit * versehene Aufgaben haben einen erhöhten Schwierigkeitsgrad.
Alle Verweise beziehen sich auf das Statistik-Skriptum.

Übungsaufgabe 21 Beweisen Sie die einfache Version ($m = 1$) des Transformationssatzes für Dichten.

Übungsaufgabe 22 Eine (absolut stetige) Zufallsvariable X heisst *gammaverteilt* mit Parametern $\alpha, \gamma \in (0, \infty)$ (kurz $X \sim Gam(\alpha, \beta)$), falls die Dichte f von X gegeben ist durch[†]

$$f_{\alpha,\beta}(x) = \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\beta x} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x).$$

Beweisen Sie das Additionstheorem der Gammaverteilung, i.e. zeigen Sie, dass für unabhängige Zufallsvariable $X \sim Gam(\alpha_1, \beta), Y \sim Gam(\alpha_2, \beta)$ die Zufallsvariable $X + Y$ ebenfalls gammaverteilt ist und $X + Y \sim Gam(\alpha_1 + \alpha_2, \beta)$ gilt.

Übungsaufgabe 23 Die *Chiquadrat*-Verteilung ist ein Spezialfall der Gamma-Verteilung: X heisst Chiquadrat-verteilt mit $n \in \mathbb{N}$ Freiheitsgraden (kurz $X \sim \chi(n)$), falls $X \sim Gam(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})$.
Beweisen Sie: Für i.i.d. Zufallsvariable $X_1, \ldots, X_n \sim \mathcal{N}(0, 1)$ gilt $S := \sum_{i=1}^n X_i^2 \sim \chi(n)$.
(R) Illustrieren Sie das Resultat mittels Simulationen in R.

Übungsaufgabe 24 Beweisen Sie, dass die Dichte der d-dimensionalen Normalverteilung wirklich eine Wahrscheinlichkeitsdichte auf $\mathbb{R}^d$ ist.
Hinweis: Die Matrix $\Sigma \in \mathbb{R}^{d\times d}$ ist positiv definit und symmetrisch und daher orthogonal ähnlich zu einer Diagonalmatrix, i.e. es gilt $A = U\Lambda U^{-1}$ für eine Diagonalmatrix Λ und eine orthogonale Matrix Λ.

Übungsaufgabe 25 (*) Sei $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. mit Verteilungsfunktion F und $p \in (0, 1)$ eine Stetigkeitsstelle von F^-. Beweisen Sie, dass dann $\hat{F}_n^-(p)$ ein konsistenter Schätzer von $F^-(p)$ ist. Kann die Voraussetzung der Stetigkeit weggelassen werden?
(R) Verifizieren Sie Ihre Resultate mittels Simulationen in R.

[†] Γ bezeichnet die Gammafunction