6. Übung am 15. Mai 2017

UV Angewandte Statistik (405.330), Ass.-Prof. Dr. Wolfgang Trutschnig
Link Ankreuzliste: siehe www.trutschnig.net/courses
Mit 'F' versehene Aufgaben sind freiwillig, mit * versehene Aufgaben haben einen erhöhten Schwierigkeitsgrad.
Alle Verweise beziehen sich auf das Statistik-Skriptum.

Übungsaufgabe 26 Beweisen Sie Lemma 3.5: Für $X \sim \mathcal{N}(0,1), Y \sim \chi^2_n$ und X, Y unabhängig, ist die Zufallsvariable

$$T = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$$

t-verteilt mit n Freiheitsgraden, hat also die Dichte

$$g_n(x) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \Big(1 + \frac{x^2}{n}\Big)^{-\frac{n+1}{2}}, \ x \in \mathbb{R}.$$

Übungsaufgabe 27 Sei $X_1, X_2, \ldots$ eine Folge unabhängiger, $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$-verteilter Zufallsvariable; $S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_n)^2$ bezeichne die Stichprobenvarianz. Für jedes $n \geq 2$ sei die Zufallsvariable T_n definiert durch

$$T_n = \sqrt{n}\, \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sqrt{S_n^2}}.$$

Beweisen Sie, dass T_n (für $n \to \infty$) schwach gegen $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ konvergiert und illustrieren Sie das Resultat mittels Simulationen in R.
Hinweis: Neben der direkten analytischen Berechnung (Grenzwert der Dichten g_n) bietet der Satz von Slutzky (kann ohne Beweis verwendet werden) eine elegante Alternative.

Übungsaufgabe 28 Lt. Folgerung 3.9 ist die Zufallsvariable T_n aus Beispiel 27 t-verteilt mit $n-1$ Freiheitsgraden. Verwenden Sie dieses Resultat, um ein Konfidenzintervall für den Parameter μ der Normalverteilung (bei unbekanntem σ^2 herzuleiten).

Übungsaufgabe 29 Sei $X = (X_1, X_2, \ldots X_d)$ multivariat normalverteilt mit Mittelwert $\mu \in \mathbb{R}^d$ und Kovarianzmatrix $\Sigma \in \mathbb{R}^{d \times d}$. Weiters sei $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ regulär. Beweisen Sie, dass $Y = AX$ ebenfalls multivariat normalverteilt ist und berechnen Sie Mittelwert und Kovarianzmatrix. Welche spezielle Eigenschaft hat Y für den Fall, dass A sogar orthogonal ist? Illustrieren Sie das Resultat in Dimension $d = 2$ mit Hilfe von Simulationen in R (zur Erzeugung von Stichproben der multivariaten Normalverteilung kann die Funktion 'mvrnorm' verwendet werden).

Übungsaufgabe 30 (*) Sei $X = (X_1, X_2, \ldots X_d)$ multivariat normalverteilt mit Mittelwert $\mu \in \mathbb{R}^d$ und Kovarianzmatrix $\Sigma \in \mathbb{R}^{d \times d}$. Weiters habe $A \in \mathbb{R}^{m \times d}$ $(m \leq d)$ vollen Rang. Ist dann $Y = AX$ auch wieder (m-dimensional) normalverteilt?
Hinweis: Erarbeiten Sie zuerst einen Vermutung mit Hilfe von Simulationen in R (zur Erzeugung von Stichproben der multivariaten Normalverteilung kann die Funktion 'mvrnorm' verwendet werden).