7. Übung am 09. Mai 2022

UV Angewandte Statistik (405.170)

Übungsaufgabe 37. X erfülle $\mathbb{V}(X) \in (0, \infty)$, $X_1, \ldots, X_n$ sei eine Zufallsstichprobe von X. Beweisen Sie, dass I_n, gegeben durch

$$I_n = \left[\overline{X}_n - \Phi^{-}(1 - \tfrac{\alpha}{2})\sqrt{\frac{S_n^2}{n}}, \quad \overline{X}_n + \Phi^{-}(1 - \tfrac{\alpha}{2})\sqrt{\frac{S_n^2}{n}} \right],$$

ein asymptotisch exaktes Konfidenzintervall für $\mathbb{E}(X)$ ist, und zeigen Sie $\lim_{n\to\infty} \lambda(I_n) = 0\,[\mathbb{P}]$. Zeigen Sie weiters mit Hilfe von Simulationen, dass I_n für $n = 10$ sehr geringe Überdeckungswahrscheinlichkeit für $\mathbb{E}(X)$ haben kann.

Übungsaufgabe 38 (Fortsetzung von Aufgabe 33)**.** Schätzen Sie den Parameter θ der Geometrischen Verteilung, in dem Sie wie in der VO skizziert, die Summe der quadratischen Fehler minimieren. Sie können dabei alle n Gleichungen (n...Anzahl der Rückgabetage) oder nur die ersten $g \in \{2, \ldots, n\}$ Gleichungen betrachten. Verwenden Sie dazu beispielsweise die R-Funktion *nls* mit *algorithm='port'* oder andere R-Funktionen für die quadratische Minimierung unter Nebenbedingungen (in unserem Fall ist die Nebenbedingung $0 \leq \theta \leq 1$).

Übungsaufgabe 39. Seien $x \geq 0, t > 0, m \in \mathbb{N}$ und X poissonverteilt mit Parameter mt (wir schreiben $X \sim \text{Pois}(mt)$). Berechnen Sie

$$\lim_{m\to\infty} \mathbb{P}\left(X \leq mx\right).$$

Hinweis: Nach dem Additionstheorem der Poisson-Verteilung existieren für jedes $m \in \mathbb{N}$ unabhängige Pois(t)-verteilte Zufallsvariable $X_1, \ldots, X_m$ mit $\sum_{i=1}^m X_i = X$, obiger Grenzwert lässt sich daher durch geschickte Anwendung des CLTs berechnen.

Übungsaufgabe 40. Geben Sie ein Beispiel dafür, dass die erste Aussage des Satzes von Slutzky i.A. nicht gilt, wenn $Y_n \xrightarrow{w} Y$, die Zufallsvariable Y aber nicht konstant $[\mathbb{P}]$ ist. Verifizieren Sie Ihr Beispiel mittels Simulationen in R.

Übungsaufgabe 41. Die Zufallsvariable U und V seinen unabhängig und stetig gleichverteilt auf $[0, 1]$. Berechnen Sie die Verteilung des Zufallsvektors (X, Y) gegeben durch

$$X = \sqrt{-2\ln(U)}\cos(2\pi V), \quad Y = \sqrt{-2\ln(U)}\sin(2\pi V).$$

Hinweis: Ein Scatterplot von Stichproben von (X, Y) zeigt sofort, auf welche Verteilung es hinausläuft.

Übungsaufgabe 42. Für Wahrscheinlichkeitsmaße μ, ν auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ist die sog. *total variation* Metrik definiert durch

$$TV(\mu, \nu) := \sup\{|\mu(B) - \nu(B)| : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}\}.$$

Angenommen, $F, F_1, F_2, \ldots$ sind absolut stetige Verteilungsfunktionen mit Wahrscheinlichkeitsdichten $f, f_1, f_2, \ldots$; weiters bezeichne $\mu, \mu_1, \mu_2, \ldots$ die entsprechenden Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Zeigen Sie: Wenn $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_1 = 0$ dann folgt sogar $\lim_{n\to\infty} TV(\mu_n, \mu) = 0$.