7. Übung am 22. Mai 2018

UV Angewandte Statistik (405.330), Ass.-Prof. Dr. Wolfgang Trutschnig
Link Ankreuzliste: siehe www.trutschnig.net/courses
Mit 'F' versehene Aufgaben sind freiwillig, mit * versehene Aufgaben haben einen erhöhten Schwierigkeitsgrad.
Alle Verweise beziehen sich auf das Statistik-Skriptum.

Übungsaufgabe 30 (R) Satz 3.8 und Folgerung 3.9 lassen sich nicht einfach auf andere, absolut stetige Verteilungen übertragen. Suchen Sie mit Hilfe von Simulationen Beispiele von stetigen Verteilungen, für die die Verteilung von $\sqrt{n}\frac{\overline{X}_n-\mathbb{E}(X)}{\sqrt{S_n^2}}$ stark von t_{n-1} abweicht. Die beobachteten Eigenschaften müssen nicht bewiesen werden, Simulationen reichen.

Übungsaufgabe 31 Verwenden Sie die PIT (probability integral transform) um ein exaktes Konfidenzinterval C_n für den Parameter θ der Exponentialverteilung herzuleiten.
Hinweis: Für $X \sim Ex(\theta)$ gilt $e^{-\theta X} \sim \mathcal{U}(0,1)$ und damit $2\theta\sum_{i=1}^n X_i \sim \chi^2_{2n}$.

Übungsaufgabe 32 Sei X_1, X_2 i.i.d. $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ mit bekanntem σ^2; $X_{(1)}, X_{(2)}$ bezeichne die Ordnungsstatistiken. Beweisen Sie, dass dann $\mathbb{P}(X_{(1)} \leq \mu \leq X_{(2)}) = 0.5$ gilt und berechnen Sie $\mathbb{E}(X_{(2)} - X_{(1)})$. Überprüfen Sie die erhaltenen Aussagen mittels Simulationen in R.

Übungsaufgabe 33 Sei $X_1, X_2, \ldots, X_n$ eine Stichprobe von $X \sim F$, wobei die Verteiltungsfunktion F stetig ist; $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \cdots \leq X_{(n)}$ bezeichne, wie gewohnt, die Ordnungsstatistiken. Berechnen Sie das kleinstmögliche $n \in \mathbb{N}$ mit $\mathbb{P}(X_{(1)} \leq F^{-}(0.5) \leq X_{(n)}) \geq 0.99$. Überprüfen Sie das erhaltene Resultat mittels Simulationen in R für von Ihnen gewählte stetige Verteilungsfunktionen F.

Übungsaufgabe 34 Sei F eine stetige Verteilungsfunktion und $X_1, X_2, \ldots$ eine Zufallsstichprobe von $X \sim F$. Weiters gelte $x_1 < x_2 < x_3$ und $F(x_i) \in (0,1)$ für jedes $i \in \{1,2,3\}$. Wenn I_1, I_2, I_3 exakte Konfidenzintervalle (Überdeckungswahrscheinlichkeit $1-\alpha$) für $F(x_1), F(x_2), F(x_3)$ sind, ist dann $I_1 \times I_2 \times I_3$ auch ein Konfidenzbereich mit der Überdeckungswahrscheinlichkeit $1-\alpha$ für den Vektor $(F(x_1), F(x_2), F(x_3))$? Beantworten Sie die Frage mittels Simulationen in R.