11. Übung am 26. Juni 2017

UV Angewandte Statistik (405.330), Ass.-Prof. Dr. Wolfgang Trutschnig
Link Ankreuzliste: siehe www.trutschnig.net/courses
Mit 'F' versehene Aufgaben sind freiwillig, mit * versehene Aufgaben haben einen erhöhten Schwierigkeitsgrad.
Alle Verweise beziehen sich auf das Statistik-Skriptum.

Übungsaufgabe 51 (R) Die Zeilen 01-46 in R-Codes_applied_stats11.R implementieren einen auf den ersten Blick etwas ungewöhnlichen Hypothesentest. Finden Sie heraus, was der R-Code macht, und berechnen Sie approximativ die power-Funktion des Tests. Adaptieren Sie weiters den Code so, dass im Falle zweier Exponentialverteilung auf Gleichheit der Parameter getestet wird, und berechnen Sie approximativ den Fehler erster Art.

Übungsaufgabe 52 $X_1, \ldots, X_n$ sei eine Stichprobe von $X \sim A(p)$. Entwickeln Sie für den Fall $n = 100$ einen Hypothesentest für $H_0 : p \leq \frac{1}{4}$ versus $H_1 : p > \frac{1}{4}$, dessen Fehler erster Art[†] möglichst nahe bei 0.05 liegt, in dem Sie analog zum zweiten Teil des Toy Examples in den Folien (Seiten 10-11) vorgehen. Arbeiten Sie mit Simulationen, um zu überprüfen, ob der Test das Signifikanzniveau α einhält und um die Form der power-Funktion zu skizzieren.

Übungsaufgabe 53 $X_1, \ldots, X_n$ sei eine Stichprobe von X mit $\sigma^2 = \mathbb{V}(X) < \infty$ und $\mu = \mathbb{E}(X) \in \mathbb{R}$ (beide Parameter unbekannt). Um $H_0 : \mu \leq \mu_0$ versus $H_1 : \mu > \mu_0$ für grosses n auf Signifikanzniveau α zu testen, schlägt Erika Musterfrau das folgende Kriterium vor: Verwerfe H_0 genau dann, wenn $Y_n = \sqrt{n}\,\frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\sqrt{S_n^2}} > \Phi^-(1-\alpha)$ gilt. Ist dies ein asymptotisch exakter Test? Skizzieren Sie mit Hilfe von Simulationen die power-Funktion des Tests.

Übungsaufgabe 54 (Fortsetzung von Aufgabe 50 und Beispiel 5.1)
$X_1, \ldots, X_n$ sei eine Stichprobe von $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, die Zufallsvariable T_n sei definiert durch $T_n = \sqrt{n}\,\frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\sqrt{S_n^2}}$. Wir verwerfen $H_0 : \mu = \mu_0$ auf dem Niveau $\alpha \in [0, 1]$ genau dann wenn $|T_n| > t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}$, also genau dann, wenn $T_n \in V_\alpha := (-\infty, -t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}) \cup (t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}, \infty)$ gilt[†]. Berechnen Sie die Verteilung der Zufallsvariable $\hat{q}$, definiert durch

$$\hat{q}(\omega) = \inf\left\{\alpha \in [0, 1] : T_n(\omega) \in V_\alpha\right\} \quad (\inf(\emptyset) := 1).$$

Übungsaufgabe 55 Max Mustermann schlägt den folgenden Test auf Normalverteilung vor: Ausgehend von einer Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$ von $X \sim F$ setzen wir $\mu_0 = \overline{X}_n$ und $\sigma_0 = \sqrt{S_n^2}$ und testen dann (entweder mit Aufgabe 43 oder mit Aufgabe 49) $H_0 : F = F_{\mu_0,\sigma_0^2}$ versus $H_1 : F \neq F_{\mu_0,\sigma_0^2}$, wobei F_{μ_0,σ_0^2} die Verteilungsfunktion von $\mathcal{N}(\mu_0, \sigma_0^2)$ bezeichnet. Überprüfen Sie mittels Simulationen, dass der resultierende Tests für kleine Samples Size ($n = 10, 20, 30$) sehr geringer Power hat und überlegen Sie sich, warum dem so ist.

[†] Zur Erinnerung: $\alpha = \sup_{p \leq \frac{1}{4}} \mathbb{P}_p(\text{Verwerfe } H_0)$

[†] V_α heisst Verwerfungsbereich auf dem Niveau α