01. Übung am 19. März 2018

[LVA 405.552 UV Abhängigkeitsmodellierung, Ankreuzliste siehe www.trutschnig.net/courses mit * versehene Aufgaben sind freiwillig]

Übungsaufgabe 1 Beweisen Sie Lemma 1.6 (Aufwärmübung!)

Übungsaufgabe 2 Beweisen Sie die in Satz 1.7 behauptete Eindeutigkeit des Paares (ν_a, ν_s) (eine zweite Aufwärmübung!).

Übungsaufgabe 3 Beweisen Sie Satz 1.9.

Übungsaufgabe 4 Wir betrachten $(\Omega, \mathcal{A}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. X sei exponentialverteilt mit Parameter $\theta = 1$, Y sei stetig gleichverteilt auf $[0,1]$. $\mu = \mathbb{P}^X$ und $\nu = \mathbb{P}^Y$ bezeichnen die entsprechenden Verteilungen. Bestimmen Sie die Lebesgue Zerlegung $\nu = \nu_a + \nu_s$ von ν bezüglich μ sowie die Lebesgue Zerlegung $\mu = \mu_a + \mu_s$ von μ bezüglich ν.

Übungsaufgabe 5 Die Definition der Absolut-Stetigkeit eines Maß ν bezüglich eines Maßes μ funktioniert auch für unendliche Maße. Wir betrachten die folgenden zwei Maße ν, μ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}([0,1]))$: μ sei das Zählmaß und ν sei das Lebesgue-Maß, i.e.

$$\mu(E) = \#E, \quad \nu(E) = \lambda(E).$$

für jedes $E \in \mathcal{B}([0,1])$. Gilt dann $\nu \ll \mu$ (oder umgekehrt)? Existiert eine Radon-Nikodym Ableitung von ν bezüglich μ (oder umgekehrt)?

Übungsaufgabe 6 (just for fun*) [†] Die Folge $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ konvergiere gegen $a \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ sei beliebig. Berechnen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^k a_i$$

[†] eine meiner ehemaligen Prüfungsaufgaben in Maßtheorie, hat nichts mit Radon-Nikodym oder Lebesgue Zerlegung zu tun, ist aber eine gute Übung.