2. Übung am 18. Oktober 2021

[LVA 405.163 UE Statistik, Link zur Ankreuzliste siehe www.trutschnig.net/courses
mit * versehene Aufgaben sind freiwillig]

Übungsaufgabe 7 Die Indikatorfunktion $\mathbf{1}_A : \Omega \to \{0,1\}$ einer Menge $A \subseteq \Omega$ ist definiert durch

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A, \\ 0 & \text{falls } x \in A^c. \end{cases}$$

Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge beliebiger Mengen, $\underline{A} := \liminf_{n\to\infty} A_n$ und $\overline{A} := \limsup_{n\to\infty} A_n$. Gelten die folgende Gleichungen für jedes $x \in \Omega$?

$$\mathbf{1}_{\underline{A}}(x) = \liminf_{n\to\infty} \mathbf{1}_{A_n}(x)\,, \quad \mathbf{1}_{\overline{A}}(x) = \limsup_{n\to\infty} \mathbf{1}_{A_n}(x)$$

Hinweis: Verwenden Sie Übungsaufgabe 1.

Übungsaufgabe 8 Wir betrachten die folgenden zwei Mengensysteme in $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 &:= \big\{(a_1,a_2] \times (b_1,b_2] \subseteq \mathbb{R}^2 : a_1 \le a_2, b_1 \le b_2\big\} \\ \mathcal{E}_2 &:= \big\{(-\infty,a] \times (-\infty,b] \subseteq \mathbb{R}^2 : a,b \in \mathbb{R}\big\} \end{aligned}$$

Sind $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ Halbringe? Beweisen Sie $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{E}_1) = \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{E}_2)$.

Übungsaufgabe 9 Beweisen Sie Satz 2.12.

Übungsaufgabe 10 Zeigen Sie, dass sich jede diskrete Zufallsvariable $X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ in der Form $X(\omega) = \sum_{n=1}^\infty \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}(\omega)$ darstellen lässt, wobei die $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \in \mathbb{R}$ paarweise verschieden und die Mengen $A_1, A_2, \ldots, \in \mathcal{A}$ paarweise disjunkt mit $\bigcup_{n=1}^\infty A_i = \Omega$ sind.

Übungsaufgabe 11 Sei $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton wachsend (nicht notwendigerweise streng monoton). Beweisen Sie, dass T dann auch Borel-messbar ist.

Übungsaufgabe 12 Wir betrachten den Folgenraum $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}} =: \Sigma_2$, $\mathcal{E} = \mathcal{O}$ sei die von der Metrik ρ auf Ω induzierte Topologie, wobei für $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \ldots), \mathbf{l} = (l_1, l_2, \ldots) \in \Omega$ gilt

$$\rho(\mathbf{k}, \mathbf{l}) = \begin{cases} 0 & \text{falls } \mathbf{k} = \mathbf{l} \\ 2^{1-\min\{i\in\mathbb{N}:\ k_i \neq l_i\}} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass eine Folge $(\mathbf{k}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ bezügl. ρ genau dann konvergiert, wenn für jede Koordinate $i \in \mathbb{N}$ gilt: k_i^n konstant ab Index $n_0 = n_0(i) \in \mathbb{N}$ (wir schreiben der Einfachheit halber $\mathbf{k}^n = (k_1^n, k_2^n, k_3^n, \ldots)$.
Zeigen Sie weiters, dass die Borel'sche σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathcal{O})$ die folgenden Mengen enthält:

- $\{\mathbf{k}\}$ für jedes $\mathbf{k} \in \Sigma_2$.
- $\{\mathbf{k} \in \Sigma_2 : k_i = 1$ für unendlich viele $i \in \mathbb{N}\}$.
- $\{\mathbf{k} \in \Sigma_2 : k_i = 1$ für unendlich viele $i \in \mathbb{N}$, $k_j = 0$ für unendlich viele $j \in \mathbb{N}\}$.