6. Übung am 29. November 2021

[LVA 405.161 UE Statistik, Link zur Ankreuzliste siehe www.trutschnig.net/courses
mit * versehene Aufgaben sind freiwillig]

Übungsaufgabe 31 (Gepooltes PCR-Testen) Angenommen, das Unternehmen 'CNG' muss $n = 1.000.000$ PCR Tests auswerten und hat dafür die folgenden 2 Optionen:

O1) Jeder Test wird einzeln ausgewertet, wir benötigen also n Tests.

O2) Die Tests werden 'gepoolt' ausgewertet, d.h., man wählt eine Batch.size $B \in \{2, \ldots, 10\}$ und fasst (schüttet Teile von) jeweils B Proben in einen 'Batch' zusammen und testet die Zusammenfassung. Falls eine Zusammenfassung negativ ist, sind alle B Proben des betrachteten Batches negativ; falls sie positiv ist, wird jede der B Proben des Batches einzeln getestet. Für einen Batch benötigen wir daher entweder nur 1 oder $B + 1$ Tests.

Angenommen, die aktuelle Prävalenz ist 7%[†]. Was ist die erwartete Anzahl von nötigen Tests für jedes $B \in \{2, \ldots, 10\}$ und was ist in diesem Fall die optimale Batch.size B? Wie viel Prozent an Tests können für das optimale B gegenüber Option O1) im Mittel eingespart werden?
Hinweis: Die Aufgabe ist mittels Grundwissen aus 'Wahrscheinlichkeitsrechnung' problemlos lösbar. Sinnvollerweise verwenden Sie ergänzend R.

Übungsaufgabe 32 Beweisen Sie die folgende in Behauptung 5.7 formulierte Aussage: Sei X eine nicht-negative Zufallsvariable. Weiters seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}, (Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen von einfachen Zufallsvariablen, die die Punkte (a) und (b) in Satz 5.5 erfüllen. Dann gilt

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(X_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(Y_n).$$

Übungsaufgabe 33 Sei X eine Zufallsvariable. Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden beiden Aussagen:

1. $\mathbb{E}(X^2) = 0$.
2. Es existiert eine Menge $A \in \mathcal{A}$ mit $\mathbb{P}(A) = 1$ sodass $X(\omega) = 0$ für alle $\omega \in A$.

Übungsaufgabe 34 Die Verteilungsfunktion F sei gegeben durch:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ \frac{1}{4} + \frac{3x}{4} & \text{für } x \in [0, 1] \\ 1 & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$$

Berechnen Sie $\mathbb{E}(X)$ für $X \sim F$ analog zu Beispiel 5.8.

Übungsaufgabe 35 Sei X eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F. Drücken Sie die Verteilungsfunktionen F_{X^+} und F_{X^-} von X^+ und X^- durch F aus. Drücken Sie weiters $F_{|X|}$, F_{-X} und F_{X^2} durch F aus.

[†] die Wahrscheinlichkeit, dass eine einzelne Probe positiv ist, ist also $p = 0.07$

Übungsaufgabe 36 Angenommen, $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Folge λ-treuer Transformationen auf $[0,1]$, die punktweise gegen eine Funktion $h : [0,1] \to [0,1]$ konvergiert. Ist dann auch h λ-treu?

Hinweis: Die folgende Aussage kann ohne Beweis verwendet werden:

- Eine messbare Transformation $h : [0,1] \to [0,1]$ ist λ-treu genau dann, wenn für alle stetigen Funktionen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ die folgende Gleichheit gilt:

$$\int_{[0,1]} f \circ h(x) d\lambda(x) = \int_{[0,1]} f d\lambda(x)$$