7. Übung am 06. Dezember 2021

[LVA 405.161 UE Statistik, Link zur Ankreuzliste siehe www.trutschnig.net/courses
mit * versehene Aufgaben sind freiwillig]

Übungsaufgabe 37 Beantworten Sie Frage 5.21.

Übungsaufgabe 38 Sei $X \sim F$ mit F aus Aufgabe 33. Berechnen Sie $\mathbb{E}(X^2)$ und $\mathbb{V}(X)$ indem Sie zuerst die Verteilungsfunktion F_{X^2} von X^2 berechnen und dann wiederum Satz 5.15 anwenden.

Übungsaufgabe 39 Beweisen Sie Satz 5.15 in 2 Schritten. Hinweis: Sie können entweder dem Integralaufbau folgen und das Resultat zuerst (S1) Für nicht-negative Zufallsvariable X, und dann (S2) für integrierbare Zufallsvariable unter Verwendung der Zerlegung $X = X^+ - X^-$ beweisen. Einfacher (und eleganter) geht es jedoch gleich allgemein durch geschickte Anwendung des Satzes von Fubini.

Übungsaufgabe 40 Sei X eine Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ Borel-messbar, und $h \circ X$ integrierbar. Beweisen Sie die folgende Gleichheit (a.k.a. Transformationsformel):

$$\mathbb{E}(h \circ X) = \int_{\mathbb{R}} h(x) d\,\mathbb{P}^X(x) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^X}(h)$$

wobei die zweite Gleichheit reine Notation ist und nur andeutet, dass der Erwartungswert der Zufallsvariable h auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P}^X)$ betrachtet wird.
Hinweis: Dem Integralaufbau folgen und die Gleichheit zuerst für einfaches h beweisen.

Übungsaufgabe 41 Beweisen Sie den Weierstrass'schen Approximationssatz[†] elegant und einfach mit Hilfe des in der Vorlesung bewiesenen Schwachen Gesetzes der Großen Zahlen in 5 Schritten:

1. $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ sei stetig, $\|f\|_\infty := \max\{|f(x)| : x \in [0,1]\}$ bezeichne sie Maximumsnorm. Rufen Sie sich in Erinnerung, dass dann f sogar gleichmäßig stetig ist, i.e. für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ sodass $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ falls $|x - y| < \delta$.

2. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist das Bernstein Polynom $B_n f$ an der Stelle $x \in [0,1]$ definiert durch

$$B_n f(x) = \sum_{k=0}^{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

3. Sei nun $p \in [0,1]$ fest und $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger, $Bin(1,p)$-verteilter Zufallsvariable. Wir setzen $\overline{X}_n(\omega) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i(\omega)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

4. Zeigen Sie

$$\mathbb{E}\big(f \circ \overline{X}_n\big) = B_n f(p) \quad \text{sowie} \quad |f(\overline{X}_n) - f(p)| \leq \varepsilon + 2\|f\|_\infty \mathbf{1}_{[\delta,1]}\big(|\overline{X}_n(\omega) - p|\big).$$

[†]Jede stetige Funktion auf einem Intervall $[a,b]$ ist der gleichmäßige Grenzwert von Polynomen

5. Zeigen Sie mit Hilfe von Punkt 4 und der Tschebyscheff'schen Ungleichung

$$|B_n f(p) - f(p)| \leq \varepsilon \, + \, 2\|f\|_\infty \, \frac{p(1-p)}{n\delta^2}$$

und folgern Sie damit

$$\lim_{n\to\infty} \|B_n f - f\|_\infty = 0$$

Übungsaufgabe 42 Sei (X, Y) absolut stetig mit Wahrscheinlichkeitsdichte (stetige Gleichverteilung auf Q)

$$f(x,y) = 2 \cdot \mathbf{1}_Q(x,y) \quad \text{wobei } Q := \left[0, \frac{1}{2}\right]^2 \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right]^2.$$

Berechnen Sie die Verteilungsfunktion F von X und G von Y sowie $\mathbb{E}(X)$ und $\mathbb{E}(Y)$. Sind X und Y unkorreliert?