9. Übung am 20. Dezember 2021

[LVA 405.161 UE Statistik, Link zur Ankreuzliste siehe www.trutschnig.net/courses
mit * versehene Aufgaben sind freiwillig]

Übungsaufgabe 49 (Aufwärmübung) Wir betrachten zwei diskrete Zufallsvariable X, Y mit Werten in $\{-1, 0, 1\}$ und der folgenden gemeinsamen Verteilung:

$$P(X = i, Y = j) = \begin{cases} \frac{1}{32} & \text{für } (i, j) \in \{(1, 1), (-1, 1)\}, \\ \frac{3}{32} & \text{für } (i, j) \in \{(-1, -1), (1, -1), (1, 0), (0, 1)\}, \\ \frac{5}{32} & \text{für } (i, j) \in \{(-1, 0), (0, -1)\}, \\ \frac{8}{32} & \text{für } (i, j) = (0, 0) \end{cases}$$

Sind X und Y unabhängig? Sind X^2 und Y^2 unabhängig? Für welches $n \in \mathbb{N}$ sind X^n und Y^n unabhängig?

Übungsaufgabe 50 (Aufwärmübung) Beweisen Sie Ungleichung (7.2).

Übungsaufgabe 51 Sei (X, Y) absolut stetig mit Wahrscheinlichkeitsdichte (stetige Gleichverteilung auf Ellipse)

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \mathbf{1}_E(x, y) \quad \text{wobei } E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \leq 4\}.$$

Sind X und Y unabhängig?
Berechnen Sie für jedes $x \in (0, 1)$ weiters $\mathbb{E}(Y|X = x) := \int_{\mathbb{R}} y\, f(x, y) d\lambda(y)$.

Übungsaufgabe 52 Die Zufallsvariable $Y_1, Y_2, \ldots$ seien unabhängig und logarithmisch normalverteilt mit Parametern μ, σ (siehe Gleichung (3.13)). Beweisen Sie die Existenz einer Konstante $c \in \mathbb{R}$ mit

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} Y_i} = c \ [\mathbb{P}]$$

und bestimmen Sie c.

Übungsaufgabe 53 (Euler'schen Primzahldarstellung der Zetafunktion) Die berühmte Riemann'sche Zeta-Funktion ζ ist für $s \in (1, \infty)$ definiert durch

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}.$$

X sei eine diskrete Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit $\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{\zeta(s) k^s}$ für $k \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$. $\mathcal{P}$ bezeichne die Menge aller Primzahlen, $\mathcal{P}_n$ sei definiert durch $\mathcal{P}_n = \mathcal{P} \cap [1, n]$. Für jedes $p \in \mathcal{P}$ sei $D_p \in \mathcal{A}$ definiert durch

$$D_p := \{\omega \in \Omega : p \text{ teilt } X(\omega)\}.$$

1. Zeigen Sie $\mathbb{P}(D_p) = \frac{1}{p^s}$.

2. Beweisen Sie, dass die Familie $(D_p)_{p\in\mathcal{P}}$ unabhängig ist.

3. Zeigen Sie die Gleichheit

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{p\in\mathcal{P}}\left(1-\frac{1}{p^s}\right) = \lim_{n\to\infty}\prod_{p\in\mathcal{P}_n}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)$$

in dem Sie $\{1\} = \bigcap_{p\in\mathcal{P}} D_p^c$ und die Unabhängigkeit der Familie $(D_p^c)_{p\in\mathcal{P}}$ verwenden.

Übungsaufgabe 54 $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei eine i.i.d. Folge integrierbarer, nicht-negativer Zufallsvariable, T sei eine weitere integrierbare und zu $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängige Zufallsvariable[†] mit $\mathbb{P}(T\in\mathbb{N}) = 1$. Weiters sei die *zufällige Summe*[†] S definiert durch

$$S = \sum_{i=1}^{T} X_i.$$

Beweisen Sie: S ist ebenfalls integrierbar und es gilt $\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(T)$. Wo könnten solche Summen in der Praxis auftreten?
Hinweis: $S = \sum_{n=1}^{\infty} S_n \cdot \mathbf{1}_{\{n\}}(T)$ mit $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

[†] präziser: $T, X_1, X_2, \ldots$ ist eine unabhängige Folge
[†] auch die Anzahl der Summanden ist zufällig