10. Übung am 19. Dezember 2023

[LVA 405.161 UE Statistik, Link zur Ankreuzliste siehe www.trutschnig.net/courses
mit * versehene Aufgaben sind freiwillig]

Übungsaufgabe 50 (Euler'schen Primzahldarstellung der Zetafunktion) Die berühmte Riemann'sche Zeta-Funktion ζ ist für $s \in (1, \infty)$ definiert durch

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}.$$

X sei eine diskrete Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit $\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{\zeta(s)k^s}$ für $k \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$. $\mathcal{P}$ bezeichne die Menge aller Primzahlen, $\mathcal{P}_n$ sei definiert durch $\mathcal{P}_n = \mathcal{P} \cap [1, n]$. Für jedes $p \in \mathcal{P}$ sei $D_p \in \mathcal{A}$ definiert durch

$$D_p := \{\omega \in \Omega : p \text{ teilt } X(\omega)\}.$$

1. Zeigen Sie $\mathbb{P}(D_p) = \frac{1}{p^s}$.
2. Beweisen Sie, dass die Familie $(D_p)_{p\in\mathcal{P}}$ unabhängig ist.
3. Zeigen Sie die Gleichheit

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{p\in\mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) = \lim_{n\to\infty} \prod_{p\in\mathcal{P}_n} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)$$

   in dem Sie $X^{-1}(\{1\}) = \bigcap_{p\in\mathcal{P}} D_p^c$ und die Unabhängigkeit der Familie $(D_p^c)_{p\in\mathcal{P}}$ verwenden.

Übungsaufgabe 51 Ein Tiroler beschließt, während einer stockdunklen Nacht bei seiner (3 Gehstunden entfernt wohnenden) Angebeteten fensterln[†] zu gehen. Um den Weg besser sehen zu können, nimmt er eine Taschenlampe und 2 Batterien, deren Lebensdauer $T \sim Ex(1)$ erfüllt, mit. Ist die erste Batterie entladen, nimmt er die zweite in Betrieb. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Taschenlampe bis zur Ankunft funktioniert. Wie stark erhöht sich die Wahrscheinlichkeit, wenn er 3 statt 2 Batterien mitnimmt? Bestätigen Sie Ihr Ergebnis mittels Simulationen in R.
Hinweis: Satz 6.10

Übungsaufgabe 52 Sei μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{B}([0, 1])$ und $f, g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ quadratisch integrierbar bezügl. μ. Weiters gelten die folgenden zwei Eigenschaften:

1. $f : [0, 1] \to [0, \infty)$ ist nicht-fallend.
2. $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ ist nicht-wachsend und erfüllt $\int_{[0,1]} g d\mu = 0$.

Beweisen Sie, dass dann die folgende überraschende Ungleichung gilt[†]

$$\|f - g\|_2^2 \geq \|f\|_2^2 + \|g\|_2^2 \tag{12.1}$$

[†] https://de.wikipedia.org/wiki/Fensterln

[†] $\|f\|_2 = \sqrt{\int_{[0,1]} f^2(x) d\mu(x)}$