10. Übung am 10. Jänner 2022

[LVA 405.161 UE Statistik, Link zur Ankreuzliste siehe www.trutschnig.net/courses
mit * versehene Aufgaben sind freiwillig]

Übungsaufgabe 55 (Aufwärmübung 1) Ein fairer Würfel wird unendlich oft geworfen, $X_i \in \{1, \ldots, 6\}$ bezeichne das Ergebnis des i-ten Wurfes. Weiters definieren wir $Y_n = \mathbf{1}_{(1,1,1)}(X_{3n-2}, X_{3n-1}, X_{3n})$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Konvergiert $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_n$ fast sicher und, wenn ja, wogegen? Bleibt die Antwort gleich, wenn wir $(1,1,1)$ durch $(i,j,l) \in \{1,\ldots,6\}^3$ ersetzen?

Übungsaufgabe 56 Angenommen $F, F_1, F_2, \ldots$ sind eindimensionale Verteilungsfunktionen und $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert schwach gegen F. Falsifizieren oder beweisen Sie die folgende Aussage: Wenn F stetig ist, dann gilt sogar $\lim_{n\to\infty} \|F_n - F\|_\infty = 0$.

Übungsaufgabe 57 Berechnen Sie die charakteristische Funktion von $X \sim \mathcal{U}(-a, a)$ und damit alle Momente $\mathbb{E}(X^k)$ für $k \in \mathbb{N}$. Überprüfen Sie Ihre Resultate indem Sie $\mathbb{E}(X^k)$ direkt mittels der Dichte von X berechnen.
Hinweis: Arbeiten Sie mit Potenzreichen (anstatt mit mühsam zu berechnenden Ableitungen).

Übungsaufgabe 58 Berechnen Sie $\mathbb{E}(X^k)$ für $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ und beliebiges $k \in \mathbb{N}$ mit Hilfe der charakteristischen Funktion φ_X von X.
Hinweis: Arbeiten Sie mit Potenzreichen (anstatt mit mühsam zu berechnenden Ableitungen).

Übungsaufgabe 59 Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine i.i.d. Folge mit Verteilungsfunktion F, F_n bezeichne die empirische Verteilungsfunktion gemäß Gleichung (7.3). Beweisen Sie (als Anwendung des Zentralen Grenzwertsatzes) das folgende Resultat: Für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $F(x) \in (0,1)$ und beliebiges $z \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} P\Big(\big\{\omega \in \Omega : \sqrt{n}(F_n(x)(\omega) - F(x)) \leq z\big\}\Big) = \Phi\left(\frac{z}{\sqrt{F(x)(1-F(x))}}\right)$$

Übungsaufgabe 60 Angenommen, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erfüllt die Voraussetzungen des Satzes vom Iterierten Logarithmus (LIL). Beweisen Sie, dass dann mit Wahrscheinlichkeit 1

$$\lim_{n\to\infty} \overline{X}_n = \mathbb{E}(X_1)$$

gilt (mit anderen Worten: Beweisen Sie einen Spezialfall des SLLN unter Verwendung des LIL).

Frohe Weihnachten, erholsame Feiertage und ein gesundes Jahr 2022!