11. Übung am 24. Jänner 2022

[LVA 405.161 UE Statistik, Link zur Ankreuzliste siehe www.trutschnig.net/courses
mit * versehene Aufgaben sind freiwillig]

Übungsaufgabe 61 (Aufwärmübung) Sei $X_1, X_2, \ldots$ eine Zufallsstichprobe von $X \sim Pois(\theta)$ und $\hat{\theta}_n := \overline{X}_n$. In welchem Sinne konvergiert $(\hat{\theta}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen θ?

Übungsaufgabe 62 (i) Konstruieren Sie Zufallsvariable $X, X_1, X_2, \ldots$, für die $X_n \xrightarrow{w} X$, aber nicht $X_n \xrightarrow{P} X$ gilt.
(ii) Geben Sie ein Beispiel für Zufallsvariable $X, X_1, X_2, \ldots$ an, für die $X_n \xrightarrow{P} X$ aber nicht $X_n \xrightarrow{[P]} X$ gilt.

Übungsaufgabe 63 Geben Sie ein Beispiel für Zufallsvariable $X, X_1, X_2, \ldots$ an, für die $X_n \xrightarrow{P} X$ aber in keinem (!) Punkt $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$ gilt.
Hinweis: Falls Ihnen kein Beispiel einfällt macht es durchaus Sinn, in der Literatur zu recherchieren.

Übungsaufgabe 64 Die Verteilungsfunktion F der Zufallsvariable X sei streng monoton wachsend auf $[a, b]$ (mit $a < b$) und erfülle $F(a) = 0, F(b) = 1$. $(X_1, \ldots, X_n)$ sei eine Zufallsstichprobe von X, und die Zufallsvariable $X_1^{(1)}, X_n^{(n)}$ seien definiert durch

$$X_n^{(1)}(\omega) = \min\big\{X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)\big\}, \quad X_n^{(n)}(\omega) = \max\big\{X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)\big\}.$$

Berechnen sie die Verteilungsfunktion von $X_n^{(1)}$ und jene von $X_n^{(n)}$ und beweisen Sie, dass $X_n^{(1)} \xrightarrow{P} a$ sowie $X_n^{(n)} \xrightarrow{P} b$ gilt.

Übungsaufgabe 65 Beweisen Sie die ersten beiden Aussagen des Continuous mapping theorems für den Fall, dass $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig ist.
Hinweis: Das Teilfolgenprinzip für die Konvergenz in Wahrscheinlichkeit erleichtert einen der beiden Beweise signifikant.

Übungsaufgabe 66 Seien $F, F_1, F_2, \ldots$ eindimensionale Verteilungsfunktionen. Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden zwei Aussagen:

1. $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert schwach gegen F.
2. Es existiert eine dichte Teilmenge D von $\mathbb{R}$ mit $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$ für jedes $x \in D$.