Fachbereich Mathematik
Universität Salzburg
Univ.-Prof. Dr. Wolfgang Trutschnig

Salzburg, Dezember 2021
WS 21/22

Übungsblatt 01 zu „Wissenschaftlichem Rechnen“ - R

Aufgabe 1 (**@Problemstellung 1: 50:50 Wahlergebnis, cont.,**).
$2n$ Personen gehen zur Wahl des Bürgermeisters, jeweils genau n Personen wählen einen der beiden Kandidaten. Approximieren Sie durch eine Simulation die Wahrscheinlichkeit für folgendes Ereignis: Im Laufe der Auszählung ist der Stimmenabstand zwischen den beiden Kandidaten zu keinem Zeitpunkt grösser als 2. Experimentieren Sie mit verschiedenen Werten für n, beispielsweise 2, 5, 10 und 50.

Aufgabe 2 (**@Problemstellung 2': Random walk in $\mathbb{Z}$**).
Wir betrachten den eindimensionalen, in $X_0 = 0$ startenden Random Walk in $\mathbb{Z}$[1], setzen $n = 1000$, starten den Walk $R = 10.000$ mal, und schreiben kurz X_n^j für die Position des j-ten runs im n-ten Schritt. Speichern Sie die R-Werte $\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot X_n^1, \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot X_n^2, \ldots, \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot X_n^R$, plotten Sie ein probability Histogramm der erhaltenen Werte[2] und ergänzen Sie im Histogramm die Dichte der Standardnormalverteilung. Was ist zu beobachten?

Aufgabe 3 (**@Problemstellung 2': Random walk in $\mathbb{Z}$, cont.**).
Wir betrachten wieder den eindimensionalen, in $X_0 = 0$ startenden Random Walk in $\mathbb{Z}$. Die Rückkehrzeit Z sei definiert durch $Z := \min\{i \in \mathbb{N} : X_i = X_0\}$. Versuchen Sie, den Erwartungswert von Z approximativ zu berechnen, in dem Sie für eine hinreichend grosse Stichprobe $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ den Mittelwert $\overline{Z}_n$ berechnen (und selbigen als Schätzer von für die erwartete Wartezeit $\mathbb{E}(Z)$ verwenden).

Aufgabe 4 (**@Problemstellung 2: Random walk in $\mathbb{Z}^2$, cont.**).
Wie in der LV starten wir in $X_0 = (0, 0)$ und springen mit Wahrscheinlichkeit von jeweils $p = \frac{1}{4}$ entweder um einen Schritt nach rechts, nach oben, nach links oder nach unten. X_1 bezeichne die Position nach dem ersten Sprung, X_i die Position nach dem i-ten Sprung. Berechnen Sie mit Hilfe von Simulationen approximativ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Sie innerhalb der ersten n Schritte mindestens ein Mal nach $(0, 0)$ zurückkehren. Mit anderen Worten, gesucht ist:

$$\mathbb{P}\big(X_i = X_0 \text{ für mindestens ein } i \in \{1, 2, \ldots, n\}\big)$$

Betrachten Sie insbesondere die Fälle $n = 2, 4, 10, 50, 100, 1000$.

Aufgabe 5 (**@Problemstellung 2: Random walk in $\mathbb{Z}$, cont.**).
Wir betrachten zwei (unabhängige), in $X_0 = -2$ bzw. $Y_0 = 2$ startende Random Walks $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}, (Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{Z}$. Berechnen Sie mit Hilfe von Simulationen approximativ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich die beiden Random Walks innerhalb der ersten n Schritte (mindestens ein Mal) treffen für die Fälle $n = 4, 10, 50, 100, 1000$.

[1] wir springen mit Wahrscheinlichkeit von 1/2 um einen Schritt nach rechts, und mit Wahrscheinlichkeit von 1/2 um einen Schritt nach links

[2] also ein Histogramm, dessen Fäche genau 1 ist; entweder mit dem Befehl ‘hist’ oder in gglot2

Aufgabe 6 (Import und einfache Darstellung von Daten).
Finden Sie heraus, wie in R csv- und Excel files importiert werden können. Laden Sie weiters via https://data.hub.zamg.ac.at/dataset/klima-daily Wetterdaten für mindestens 2 Messstationen im Bundesland Salzburg und 5-7 Kennzahlen (Tageslufttemperatur minimal/maximal, Niederschlagsmenge, Schneehöhe, etc.) und einen möglichst langen Zeitraum herunter, importieren Sie selbige in R und stellen Sie die Daten grafisch dar (Linienplot, Boxplots, etc.). Sind Anzeichen von Klimaerwärmung erkennbar?

Frohe Weihnachten, erholsame Feiertage und ein gesundes Jahr 2022!