## 02. Übung am 23. März 2026

**Übungsaufgabe 7.** Sei $X$ exponentialverteilt und $X_1, \ldots, X_n$ eine Stichprobe von $X$. Aus der VO wissen wir, dass $\hat{\theta}_n = \frac{1}{\overline{X}_n}$ ein stark konsistenter Schätzer für $\theta$ ist. Beweisen Sie, dass auch der Schätzer $\hat{\psi}_n := -\log(1 - F_n(1))$ stark konsistent für $\theta$ ist und überlegen Sie sich, wie man auf den Schätzer $\hat{\psi}_n$ kommt.
Finden Sie weiters mit Hilfe von R heraus, welcher der beiden Schätzer besser ist, indem Sie für ein festes, von Ihnen gewähltes $\theta \in (0, \infty)$ insgesamt $R = 1.000$ Mal Stichproben der Größe $n = 100$ generieren, beide Schätzer berechnen, und dann deren Fehler vergleichen (Boxplot oder Ähnliches).

**Übungsaufgabe 8.** Beweisen Sie die zwei im Beweis von Satz 2.3 am Ende behaupteten Eigenschaften.

**Übungsaufgabe 9.** Berechnen Sie die Verteilungsfunktion von $d_n$ gemäß Gleichung (2.2) approximativ mittels Simulationen in R für die Samples Sizes $n \in \{20, 50, 100, 500, 1000\}$.

**Übungsaufgabe 10.** Konstruieren Sie (i) eine diskrete und (ii) eine absolut stetige Zufallsvariable $X$, die $\mathbb{P}^X = \mathbb{P}^{T \circ X}$ mit $T(x) = \frac{1}{x}$ für jedes $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ erfüllt.

**Übungsaufgabe 11** (Verallgemeinerung von Aufgabe 5)**.** Eine consulting Firma sucht neue Mitarbeiter mit Universitätsabschluss. Die Einstellungskriterien inkludieren eine Punktezahl von mindestens 120 bei einem (in der Firma zu absolvierenden) IQ-Test, wobei der IQ als $\mathcal{N}(\theta, \sigma^2)$-verteilt mit unbekanntem $\theta$ und $\sigma > 0$ angenommen wird. Von 5000 Bewerbern schaffen 630 den Test, 4000 haben ein Testergebnis von mindestens 100. Schätzen Sie $\theta$ und $\sigma$. Überprüfen Sie Güte der erhaltenen Schätzers mit Hilfe von Simulationen in R.