03. Übung am 13. April 2026

UV Angewandte Statistik (405.170)
Link Ankreuzliste: siehe www.trutschnig.net/courses
Mit 'F' versehene Aufgaben sind freiwillig, mit * versehene Aufgaben haben einen erhöhten Schwierigkeitsgrad.
Alle Verweise beziehen sich auf das Statistik oder das Angewandte Statistik Skriptum.

Übungsaufgabe 12 (Fortsetzung Aufgabe 3)**.** In der Übung wurden insgesamt drei Schätzer (ein ML-Schätzer und zwei Schätzer via Momentenmethode) diskutiert. Schreiben Sie Simulationen, um die Güte der Schätzer miteinander zu vergleichen und stellen Sie die Resultate mit Hilfe von ggplot2 grafisch dar. Für welchen der drei würden Sie Sich entscheiden?

Übungsaufgabe 13. Sei $X_1, X_2, \ldots$ eine Folge unabhängiger, $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$-verteilter Zufallsvariable; $S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_n)^2$ bezeichne die Stichprobenvarianz. Für jedes $n \geq 2$ sei die Zufallsvariable T_n definiert durch

$$T_n = \sqrt{n}\,\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sqrt{S_n^2}}.$$

Beweisen Sie, dass T_n (für $n \to \infty$) schwach gegen $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ konvergiert und illustrieren Sie das Resultat mittels Simulationen in R.
Hinweis: Lesen Sie den Satz von Slutzky auf Wikipedia (English Version!) und wenden Sie ihn dann auf obige Situation an.

Übungsaufgabe 14. Wir haben im Skriptum die folgende überraschende Eigenschaft der Normalverteilung kennengelernt: Für eine Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$ von $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ sind das Stichprobenmittel $\overline{X}_n$ und die Stichprobenvarianz S_n^2 unabhängig. Zeigen Sie die Existenz einer Verteilung F mit $\mathbb{V}(X) \in (0, \infty)$ für $X \sim F$ und folgender Eigenschaft: für eine Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$ von $X \sim F$ ist S_n^2 sogar eine Funktion von $\overline{X}_n$.

Übungsaufgabe 15 (Flaschenrückgabe)**.** Der Datensatz in_and_out.RData enthält die Anzahl der pro Tag verkauften und retournierten Pfandflaschen einer Supermarktkette[i], wobei bekannt ist, dass die Zeit D zwischen dem Verkauf und der Rückgabe einer Flasche geometrisch verteilt ist. Schätzen Sie $\mathbb{E}(D)$.
Hinweis: Falls ein Link nicht funktioniert, laden Sie bitte die aktuelle Version des Skriptums herunter und klicken Sie dort auf den Link.

Übungsaufgabe 16 (Logistik)**.** Das R-Snippet logistics_simulation.R gibt mittels Simulationen eine Antwort auf die folgenden Frage: Angenommen, ein Unternehmen produziert Bauteile eines festen Typs, die in LKWs zum Kunden transportiert werden. In einem LKW haben bis zu 40 Bauteile Platz. Je voller der LKW, desto geringer die Lieferkosten pro Bauteil. Zur Abschätzung der Kosten für das kommende Jahr wird aus den Daten der letzten Jahre die mittlere Anzahl von Bauteilen pro LKW berechnet und damit dann die Kosten für das kommende Jahr (unter Kenntnis der zu erwartenden Absatzzahlen) geschätzt - ist diese Vorgangsweise clever?

[i] am ersten Tag wurden als 5668 verkauft und schon 61 (davon) retourniert; vor dem ersten Tage wurden keine Pfandflaschen verkauft