04. Übung am 20. April 2026

UV Angewandte Statistik (405.170)
Link Ankreuzliste: siehe www.trutschnig.net/courses
Mit ‘F’ versehene Aufgaben sind freiwillig, mit * versehene Aufgaben haben einen erhöhten Schwierigkeitsgrad.
Alle Verweise beziehen sich auf das Statistik oder das Angewandte Statistik Skriptum.

Übungsaufgabe 17 (Aufwärmübung)**.** X, Y seinen Zufallsvariable, A, B Borelmengen, und es gelte

$$\mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(Y \in B) = \alpha$$

für ein $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1]$. Beweisen Sie die Ungleichung

$$2\alpha - 1 \leq \mathbb{P}(X \in A, Y \in B) \leq \alpha$$

und konstruieren Sie dann Beispiele, die zeigen, dass sowohl die linke als auch die rechte Ungleichung (wenn auch nicht simultan) zu Gleichungen werden können.

Übungsaufgabe 18. Angenommen, für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $X_n \sim \mathcal{N}(\mu_n, \sigma_n^2)$, wobei $\lim_{n\to\infty} \sigma_n^2 = 0$ und $\lim_{n\to\infty} \mu_n = \mu$. Konvergiert dann $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ schwach und, wenn ja, wogegen?

Übungsaufgabe 19 (Fortsetzung von Aufgabe 15)**.** Überprüfen Sie die Güte des in Aufgabe 15 erhaltenen Schätzers $\hat{p}_n$ für p (=Parameter der in 0 startenden geometrischen Verteilung) mittels Simulationen und gehen Sie dafür wiefolgt vor:

1. Wählen Sie ein festes $p \in (0, 0.5)$ und generieren Sie (wie in der UV besprochen) einen Datensatz wie in_and_out.RData.
2. Schätzen Sie p wie in Aufgabe 15.
3. Vergleichen Sie $\hat{p}_n$ und p bzw. $\frac{1}{\hat{p}_n}$ und $\frac{1}{p}$.

Übungsaufgabe 20. Beweisen Sie: für $X \sim Ex(\theta)$ gilt $e^{-\theta X} \sim \mathcal{U}(0, 1)$ und damit $2\theta \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \chi^2_{2n}$[ii]. Verwenden Sie diesen Zusammenhang dann, um ein exaktes Konfidenzinterval C_n für den Parameter θ der Exponentialverteilung herzuleiten und verifizieren Sie dessen Güte mittels Simulationen in R.

Übungsaufgabe 21. Sei F eine beliebige (nicht notwendigerweise stetige) Verteilungsfunktion. Dann heisst die Funktion $\Phi : \mathbb{R} \times [0, 1] \to [0, 1]$, definiert durch

$$\Phi(x, r) = F(x-) + r(F(x) - F(x-)) = \mathbb{P}(X < x) + r\,\mathbb{P}(X = x)$$

die r-modifizierte Verteilungsfunktion von F. Mittels Φ kann die Stetigkeitsvoraussetzung in der PIT umgangen/ausgetrickst werden - beweisen Sie folgende Aussage: Seien $X \sim F$ und $R \sim \mathcal{U}(0, 1)$ unabhängig. Dann ist die Zufallsvariable U, definiert durch

$$U(\omega) := \Phi(X(\omega), R(\omega))$$

stetig gleichverteilt auf $[0, 1]$.

[ii] der zweite Teil muss nicht bewiesen werden, siehe Additionstheorem für die Gamma-Verteilung im Skriptum Mathematische Statistik