06. Übung am 04. Mai 2026

UV Angewandte Statistik (405.170)
Link Ankreuzliste: siehe www.trutschnig.net/courses
Mit ‘F’ versehene Aufgaben sind freiwillig, mit * versehene Aufgaben haben einen erhöhten Schwierigkeitsgrad.
Alle Verweise beziehen sich auf das Statistik oder das Angewandte Statistik Skriptum.
Sollte ein Link nicht funktionieren, laden Sie bitte die aktuelle Version des Skriptums herunter

Übungsaufgabe 27 (Fortsetzung Aufgabe 22)**.** Sei X geometrisch verteilt mit Parameter $p \in (0,1)$. Berechnen Sie (analog zu Aufgabe 22) mit elementarer Analysis $\mathbb{E}(X^2)$ und $\mathbb{V}(X)$.

Übungsaufgabe 28. Angenommen, die Verteilungsfunktionen $F, F_1, F_2, \ldots$ sind absolut stetig mit Wahrscheinlichkeitsdichten $f, f_1, f_2, \ldots$ und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_1 = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |f(x) - f_n(x)| d\lambda(x) = 0.$$

Folgt dann, dass $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ schwach gegen F konvergiert? Wie lautet Ihre Antwort, wenn stattdessen $\lim_{n\to\infty} |f(x) - f_n(x)| = 0$ für λ-fast jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt?

Übungsaufgabe 29. Für Wahrscheinlichkeitsmaße μ, ν auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ist die sog. *total variation* Metrik definiert durch

$$TV(\mu, \nu) := \sup\{|\mu(B) - \nu(B)| : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}\}.$$

Angenommen, $F, F_1, F_2, \ldots$ sind absolut stetige Verteilungsfunktionen mit Wahrscheinlichkeitsdichten $f, f_1, f_2, \ldots$; weiters bezeichne $\mu, \mu_1, \mu_2, \ldots$ die entsprechenden Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Zeigen Sie: Wenn $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_1 = 0$, dann folgt sogar $\lim_{n\to\infty} TV(\mu_n, \mu) = 0$.

Übungsaufgabe 30. Angenommen $X \sim F$ mit F absolut stetig und $X_1, \ldots, X_n$ ist eine Stichprobe von X. Dann wissen wir aus dem Satz von Glivenko-Cantelli, dass (die empirische Verteilungsfunktion) F_n gleichmäßig gegen F konvergiert. Konvergieren die entsprechenden Wahrscheinlichkeitsmaße $\mu_1 := \mu_{F_1}, \mu_2 = \mu_{F_2}, \ldots$ sogar in total variation gegen $\mu := \mu_F$?

Übungsaufgabe 31 (R)**.** Zeigen Sie mittels Simulationen in R, dass der in Satz 4.9 angegebene (zweidimensionale) Konfidenzbereich tatsächlich Überdeckungswahrscheinlichkeit $1 - \alpha$ hat.