

## 08. Übung am 18. Mai 2026

### UV Angewandte Statistik (405.170)

Link Ankreuzliste: siehe [www.trutschnig.net/courses](http://www.trutschnig.net/courses)

Mit 'F' versehene Aufgaben sind freiwillig, mit \* versehene Aufgaben haben einen erhöhten Schwierigkeitsgrad.

Alle Verweise beziehen sich auf das Statistik oder das Angewandte Statistik Skriptum.

**Sollte ein Link nicht funktionieren, laden Sie bitte die aktuelle Version des Skriptums herunter**

**Übungsaufgabe 37 (R).** Seien  $X$  und  $Y$  unabhängige Zufallsvariable, und die Zufallsvariable  $Z$  definiert durch

$$Z = X + Y \pmod{1}.$$

Beweisen Sie die folgende, auf den ersten Blick etwas überraschende Aussage: Wenn  $X$  stetig gleichverteilt auf  $[0, 1]$  ist, dann ist auch  $Z$  stetig gleichverteilt auf  $[0, 1]$ .

Verifizieren Sie dann das Resultat mittels Simulationen in R (wählen Sie eine beliebige Zufallsvariable  $Y$ , generieren Sie Samples von  $X$  und  $Y$  und plotten Sie dann ein Histogramm von  $Z$ , etc.).

**Übungsaufgabe 38 (R).** Einige der bisher kennengelernten Konfidenzintervalle setzen die Normalverteilung voraus (und funktionieren naturgemäß für Daten anderer Verteilungen oftmals schlecht bzw. gar nicht). Finden Sie heraus, was ein q-q Plot (für die Normalverteilung) macht, wie er in R implementiert ist und verifizieren/illustrieren Sie dann die Eigenschaft (siehe Seite 23, Anwendung von Slutsky)

$$Z_n := \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mathbb{E}(X)}{\sqrt{S_n^2}} \xrightarrow{w} \mathcal{N}(0, 1), \quad \text{für } n \rightarrow \infty,$$

wie folgt: setzen Sie  $n = 20$ , wählen Sie eine beliebige, quadratische integrierbare Zufallsvariable  $X$ , generieren Sie Stichproben  $X_1, \dots, X_n$  von  $X$  und berechnen Sie  $Z_n$ ; wiederholen Sie diese Schritte  $R = 1.000$  mal und erstellen Sie ein Histogramm und einen q-q Plot der erhaltenen Werte  $Z_1, \dots, Z_R$ .

Wiederholen Sie obige Schritte für  $n \in \{100, 1000, 10000\}$  - was ist zu beobachten?

**Übungsaufgabe 39 (R).** Vergleichen Sie die Performanz der Konfidenzbänder gemäß Satz 4.19 und Satz 4.20 mittels Simulationen in R. Gehen Sie dafür wie folgt vor: (i) Wählen Sie eine feste Verteilung mit stetiger Verteilungsfunktion  $F$  (nicht die schon betrachtete Beta-Verteilung) und Sample Size  $n = 20$ . (ii) Erzeugen Sie Stichproben  $X_1, \dots, X_n$  von  $X \sim F$  und berechnen Sie die beiden Bänder. (iii) Überprüfen Sie, ob die echte Verteilungsfunktion  $F$  im asymptotischen und im exakten Band liegt. Wiederholen Sie die Schritte (ii) und (iii)  $R = 1.000$  mal und berechnen Sie den Anteil von Runs, in denen das asymptotische bzw. das exakte Band die echte Verteilungsfunktion enthält.

Wiederholen Sie obige Schritte für Sample Size  $n = 200$ . Was ist zu beobachten?

**Übungsaufgabe 40 (R).** Lösen Sie Exercise 41 auf Seite 15 in testing toy example

**Übungsaufgabe 41 (R).** Lösen Sie Exercise 42 auf Seite 28 in testing toy example

**Übungsaufgabe 42 (R).** Lösen Sie Exercise 43 auf Seite 29 in testing toy example