10. Übung am 08. Juni 2026

UV Angewandte Statistik (405.170)
Link Ankreuzliste: siehe www.trutschnig.net/courses
Mit 'F' versehene Aufgaben sind freiwillig, mit * versehene Aufgaben haben einen erhöhten Schwierigkeitsgrad.
Alle Verweise beziehen sich auf das Statistik oder das Angewandte Statistik Skriptum.
Sollte ein Link nicht funktionieren, laden Sie bitte die aktuelle Version des Skriptums herunter

Übungsaufgabe 49. Nächste Woche werden wir den `p.value`, der in den letzten Einheiten schon mehrmals erwähnt wurde, sauber definieren und seine Eigenschaften analysieren. Wir bereiten uns mittels Simulationen darauf wiefolgt vor:

- Setzen Sie $n = 100, \mu_0 = 1, \sigma_0 = 1$ und erzeugen Sie eine Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$ von $X \sim \mathcal{N}(\mu_0, \sigma_0)$.
- Verwenden Sie dann `t.test` (also die in R implementierte Version von Satz 4.5), um auf $H_0 : \mu = \mu_0$ zu testen. Speichern Sie den erhaltenen `p.value` ab.
- Wiederholen Sie die obigen Schritte $R = 1.000$ mal und erstellen Sie ein Histogramm der erhaltenen R p.values. Was ist zu beobachten?

Übungsaufgabe 50. Selbiges Setting wie in der letzten Aufgabe, dieses Mal testen wir aber mittels Satz 4.6 auf $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$, siehe R-snippet `www.trutschnig.net/chisq_test_variance_normal`. Erstellen Sie abermals ein Histogramm der erhaltenen p.values. Was ist zu beobachten?

Übungsaufgabe 51. $X_1, \ldots, X_n$ sei eine Stichprobe von $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, die Zufallsvariable T_n sei definiert durch $T_n = \sqrt{n}\,\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sqrt{S_n^2}}$. Weiters sei Y eine zur Stichprobe unabhängige Zufallsvariable, es gelte $Y \sim t_{n-1}$ und F_Y bezeichne die Verteilungsfunktion von Y. Berechnen Sie die Verteilung der Zufallsvariable $\hat{p}$, definiert durch

$$\hat{p}(\omega) = \mathbb{P}\big(|Y| \geq |T_n(\omega)|\big) = 2(1 - F_Y(|T_n(\omega)|)).$$

NB: $\hat{p}(\omega)$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine t_{n-1}-verteilte Zufallsvariable einen (vom Absolutbetrag her) mindestens so großen Wert wie $T_n(\omega)$ annimmt.

Übungsaufgabe 52. Das R-Snippet `www.trutschnig.net/R-Codes_permtest.R` implementiert einen auf den ersten Blick etwas ungewöhnlichen Hypothesentest. Finden Sie heraus, was der R-Code macht, und berechnen Sie approximativ die power-Funktion des Tests. Vergleichen Sie die Powerfunktion mit jener des entsprechenden `t.test`. Adaptieren Sie weiters den Code so, dass im Falle zweier Exponentialverteilung auf Gleichheit der Parameter getestet wird, und berechnen Sie approximativ den Fehler erster Art.

Übungsaufgabe 53. In Aufgabe 47 haben wir gesehen, dass der entsprechende Hypothesentest auf die Normalverteilung extrem geringe Power (sogar noch für Sample Size $n = 100$) hat und lernen in dieser Aufgabe nun eine gängige Alternative kennen. Gehen Sie zuerst den R-Code `www.trutschnig.net/bootstrap_test_for_normality.R` Zeile für Zeile durch und finden Sie heraus, was hier gemacht wird. Überprüfen Sie dann Fehler erster Art und die power dieses neuen Tests - ist eine signifikante Verbesserung zu erkennen?