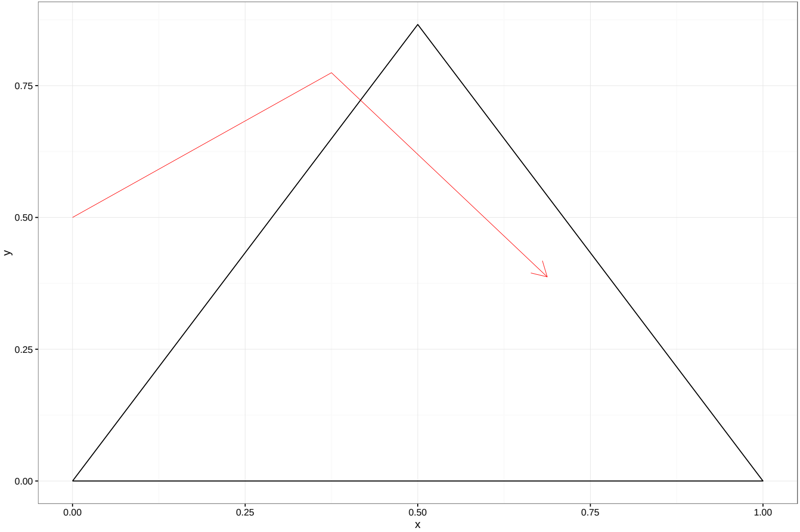
Fraktale und Zufall
Motivation der Vorlesung

Univ.-Prof. Dr. Wolfgang Trutschnig
Arbeitsgruppe Stochastik/Statistik
Fachbereich Mathematik
Universität Salzburg
www.trutschnig.net

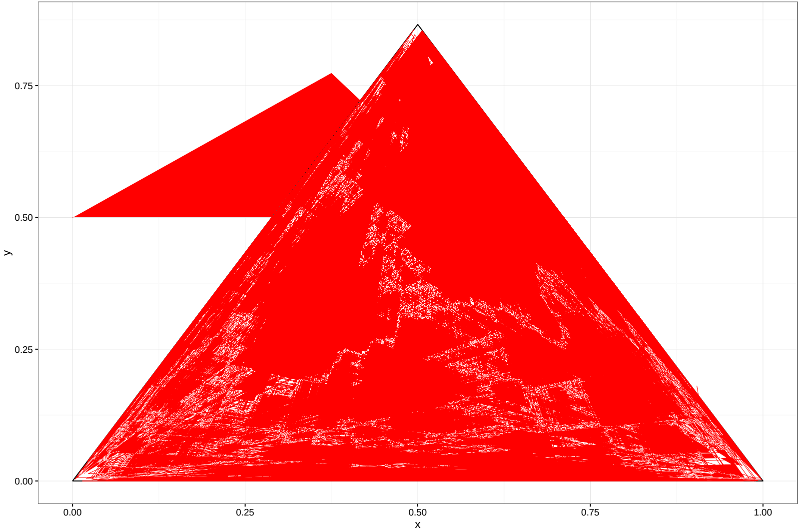
WS 2021/22

The Chaos Game at work

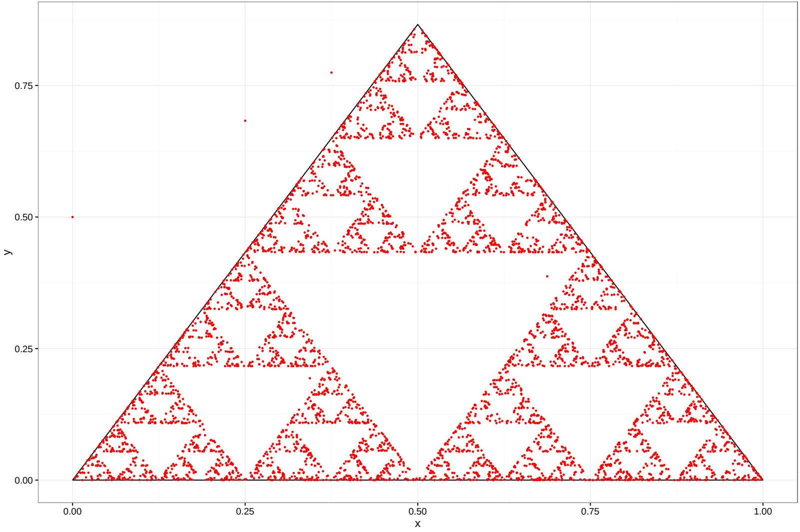


- Wir betrachten das gleichseitige Dreieck Δ mit Eckpunkten $E_1 = (0,0)$, $E_2 = (1,0)$ und $E_3 = (1/2, \sqrt{3}/2)$ und nennen $(0,0)$ die erste, $(1,0)$ die zweite und $(1/2, \sqrt{3}/2)$ die dritte Ecke.
- $z_0 \in [0,1]^2$ sei ein beliebiger Punkt.
- In einer Urne liegen drei Kugeln; eine Kugel trägt die Nummer 1, eine die Nummer 2, und eine die Nummer 3.
- Wir ziehen zufällig (!) eine Kugel, erhalten die Kugel mit der Zahl $i_1 \in \{1,2,3\}$ und setzen
$$z_1 = \frac{1}{2}\Big(z_0 + E_{i_1}\Big),$$
i.e. z_1 ist der Mittelpunkt der Strecke $z_0 \to E_{i_1}$.
- Danach legen wir die Kugel zurück.
- Mit z_1 verfahren wir analog, ziehen $i_2 \in \{1,2,3\}$ und setzen $z_2 = \frac{1}{2}(z_1 + E_{i_2})$.
- Nach n Schritten erhalten wir $z_0, z_1, z_2, z_3, \ldots z_n$.
- Plotten der Strecken $z_0 \to z_1, z_1 \to z_2, z_2 \to z_3$ bzw. der Punkte $z_0, z_1, z_2, z_3, \ldots z_n$ liefert die nachfolgenden Grafiken.

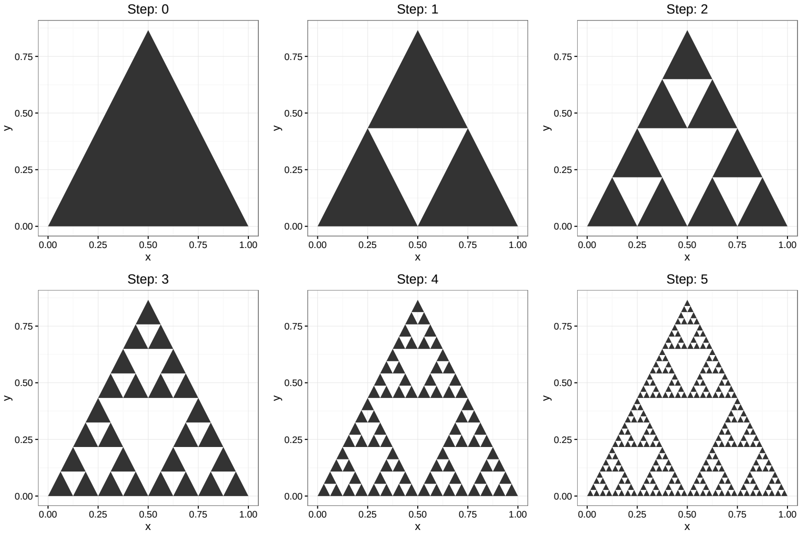
The Chaos Game at work



The Chaos Game at work



Quick reminder: Sierpinski Dreieck



Konstruktion des Sierpinski Dreiecks

- Wir starten mit dem gleichseitigen Dreieck Δ_0 mit Eckpunkten $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (1, 0)$ und $P_3 = (1/2, \sqrt{3}/2)$.
- Wir markieren die Seitenmittelpunkte und bilden so vier kleinere, gleichseitige Dreiecke und entfernen das mittlere Dreieck (ohne Rand).
- Im ersten Schritt bleiben also 3 kongruente, gleichseitige Dreiecke übrig.
- Mit jedem der 3 Dreiecke verfahren wir analog und erhalten so insgesamt 9 kleine gleichseitige Dreiecke.
- Mit jedem der 9 Dreiecke verfahren wir analog und erhalten so insgesamt 27 kleine gleichseitige Dreiecke, etc.
- Die im n-ten Schritt verbleibende Menge Δ_n besteht also aus 3^n kleinen, gleichseitigen Dreiecken.
- $\Delta_\infty := \bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_n$ heisst *Sierpinski Dreieck*.
- Wie gross ist die Fäche $\lambda_2(\Delta_\infty)$ von Δ_∞? Gilt $\Delta_\infty = \emptyset$?

Antworten:

- Es bleiben überabzählbar viele Punkte übrig! Warum?
- Wir berechnen die Fäche $\lambda_2(\Delta_\infty)$ von Δ_∞:
  - $\lambda_2(\Delta_0) = \frac{\sqrt{3}}{4}$
  - $\lambda_2(\Delta_1) = \frac{\sqrt{3}}{4}\,\frac{3}{4}$
  - $\lambda_2(\Delta_2) = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^2$
  - $\ldots$
  - $\lambda_2(\Delta_n) = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n$
  - $\lambda_2(\Delta_\infty) = \lim_{n\to\infty} \lambda_2(\Delta_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$
- Die Fläche von Δ_∞ is also null, obwohl überabzählbar viele Punkte in Δ_∞ liegen.
- Δ_∞ ist ein klassisches *selbstähnliches Fraktal*.
- Intuitiv nicht ein- und nicht zweidimensional.
- Hausdorff Dimension $dim_H(\Delta_\infty) = \frac{\log 3}{\log 2}$ - woher kommt dieser Ausdruck?

- Wir formalisieren das Chaos Game und bestimmen jene drei Punkte, die in einem Schritt ausgehend vom Punkt $z_0 = (x, y)$ erreicht werden können:
  - E_1 gezogen: $z_1 = \frac{1}{2}\Big((x, y) + (0, 0)\Big) = \frac{1}{2}(x, y) =: f_1(x, y)$
  - E_2 gezogen: $z_1 = \frac{1}{2}\Big((x, y) + (1, 0)\Big) = f_1(x, y) + (\frac{1}{2}, 0) =: f_2(x, y)$
  - E_3 gezogen: $z_1 = \frac{1}{2}\Big((x, y) + (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})\Big) = f_1(x, y) + (\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}) =: f_3(x, y)$
- Alternative Interpretation des chaos games:
- $z_0 = (x_0, y_0) \in [0, 1]^2$ sei ein beliebiger Punkt.
- Wir ziehen zufällig eine Zahl i_1 aus der Menge $\{1, 2, 3\}$, wobei p_i die Wahrscheinlichkeit dafür bezeichnet, Ecke i zu ziehen, i.e. $p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{3}$.
- Wir setzen $z_1 := (x_1, y_1) = f_{i_1}(x_0, y_0)$.
- Mit z_1 verfahren wir analog, ziehen $i_2 \in \{1, 2, 3\}$ und setzen $z_2 = (x_2, y_2) = f_{i_2}(x_1, y_1)$.
- Analog erhalten wir $z_3, z_4, \ldots, z_n$.
- Wir ziehen also in jedem Schritt zufällig eine der drei Funktionen und wenden sie auf den aktuellen Punkt an.

- Was haben die Funktionen f_1, f_2, f_3 mit dem Sierpinski Dreieck zu tun?
- Wie schaut $f_1(\Delta_\infty)$ aus?
- Wie schaut $f_2(\Delta_\infty)$ aus?
- Wie schaut $f_3(\Delta_\infty)$ aus?
- f_1, f_2, f_3 sind schrumpfende Ähnlichkeitsabbildungen und erfüllen

$$\|f_i(z) - f_i(w)\|_2 = \frac{1}{2}\|z - w\|_2.$$

- Der Faktor $\frac{1}{2}$ heisst *Schrumpfungsfaktor*.
- Exakter Zusammenhang (Hutchinson Fixpunktgleichung)

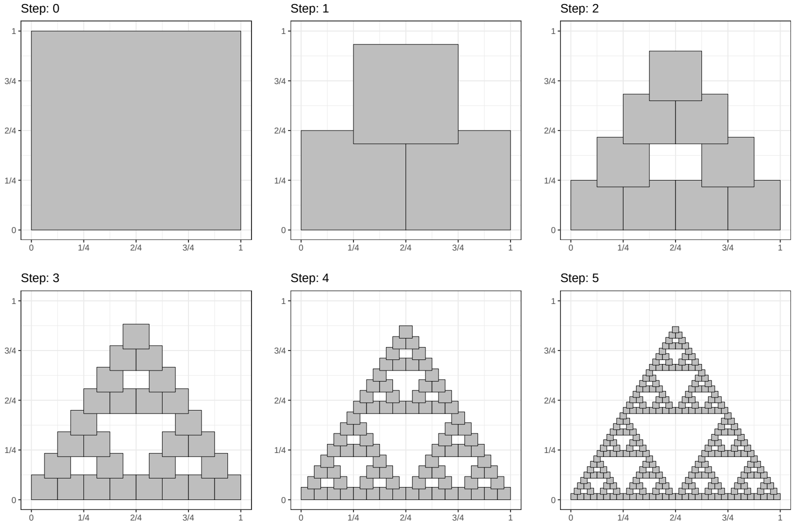
$$\Delta_\infty = f_1(\Delta_\infty) \cup f_2(\Delta_\infty) \cup f_3(\Delta_\infty) = \bigcup_{i=1}^{3} f_i(\Delta_\infty) = \mathcal{W}(\Delta_\infty).$$

- $\mathcal{W}$ heisst *Hutchinson Operator*, oft auch *collage* Operator.
- $\{(f_i)_{i=1}^3, (p_i)_{i=1}^3\}$ heisst *Iteriertes Funktionensystem mit Wahrscheinlichkeiten* (IFSP).

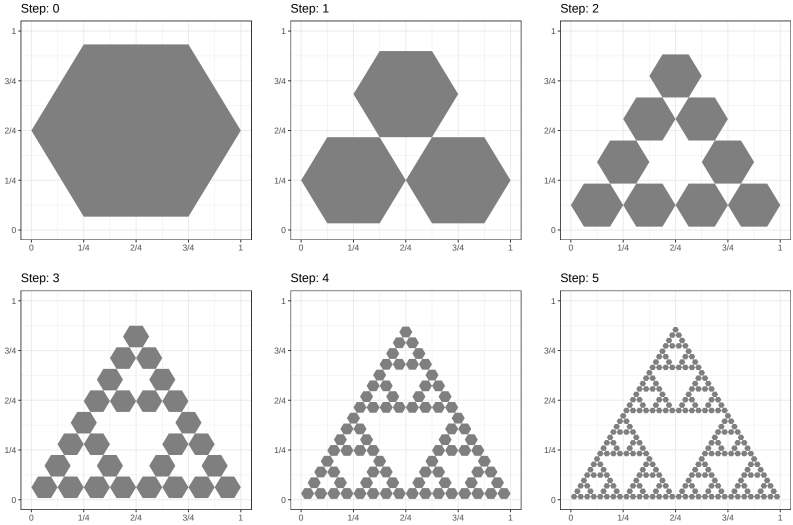
Formalisierung des Chaos Games und der Attraktor

- Δ_∞ ist der *Attraktor* des IFSP $\{(f_i)_{i=1}^3, (p_i)_{i=1}^3\}$.
- Warum Attraktor?
- Was passiert, wenn wir mit einer anderen Menge S (Quadrat, Kreis, Sechseck, etc.) als mit Δ_0 starten, die Menge mittels f_1, f_2, f_3 schrumpfen, $\mathcal{W}(S) = \bigcup_{i=1}^3 f_i(S)$ betrachten und dann den Prozess mit $\mathcal{W}(S)$ als Startmenge wiederholen?
- Wir erhalten also $\mathcal{W}(S), \underbrace{\mathcal{W}(\mathcal{W}(S))}_{=:\mathcal{W}^2(S)}, \ldots, \mathcal{W}^n(S)$.
- Welche Form hat $\mathcal{W}^n(S)$?
- $\mathcal{W}^n(S)$ 'konvergiert' gegen Δ_∞...brauchen entsprechende Abstandsmessung $\longrightarrow$ Hausdorff Metrik δ_H.

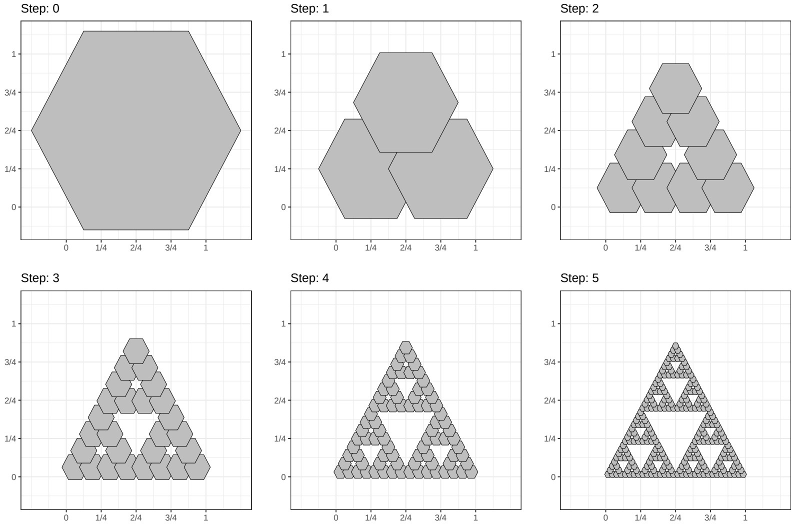
Formalisierung des Chaos Games und der Attraktor



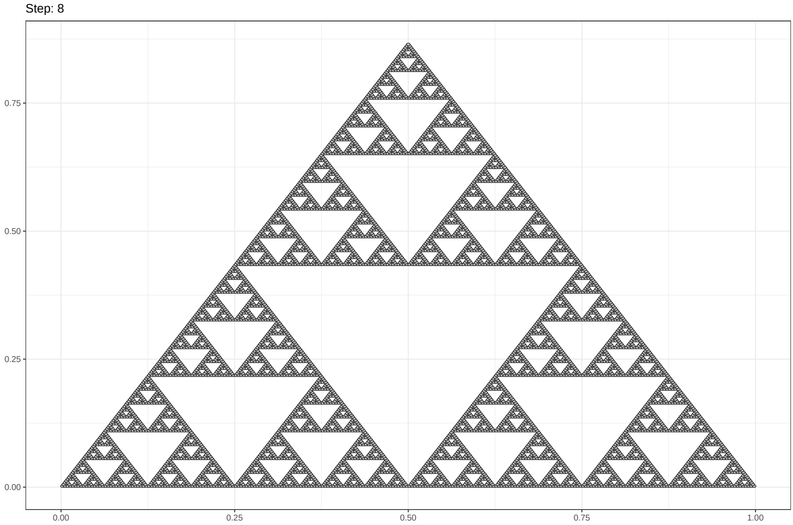
Formalisierung des Chaos Games und der Attraktor



Formalisierung des Chaos Games und der Attraktor

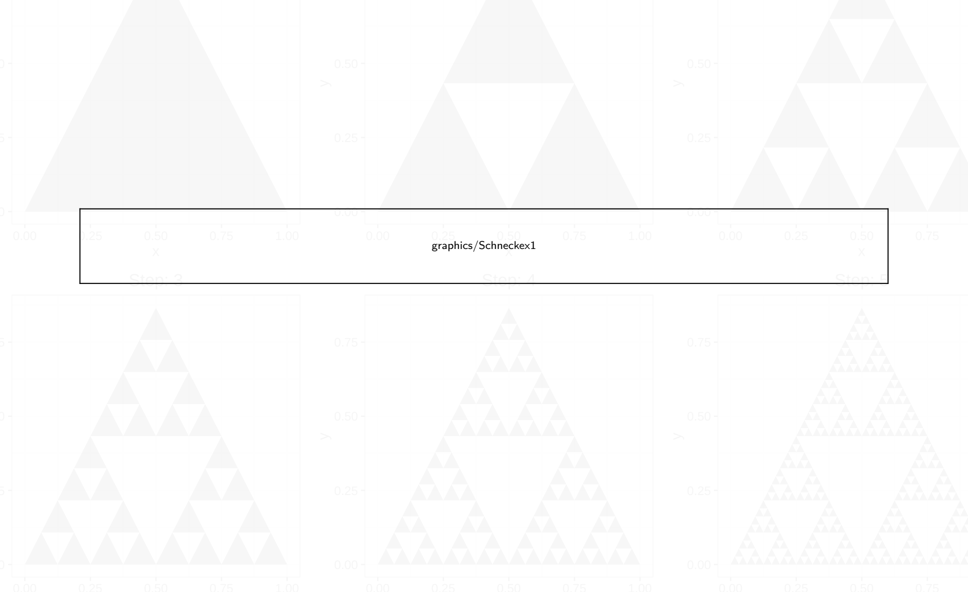


Formalisierung des Chaos Games und der Attraktor



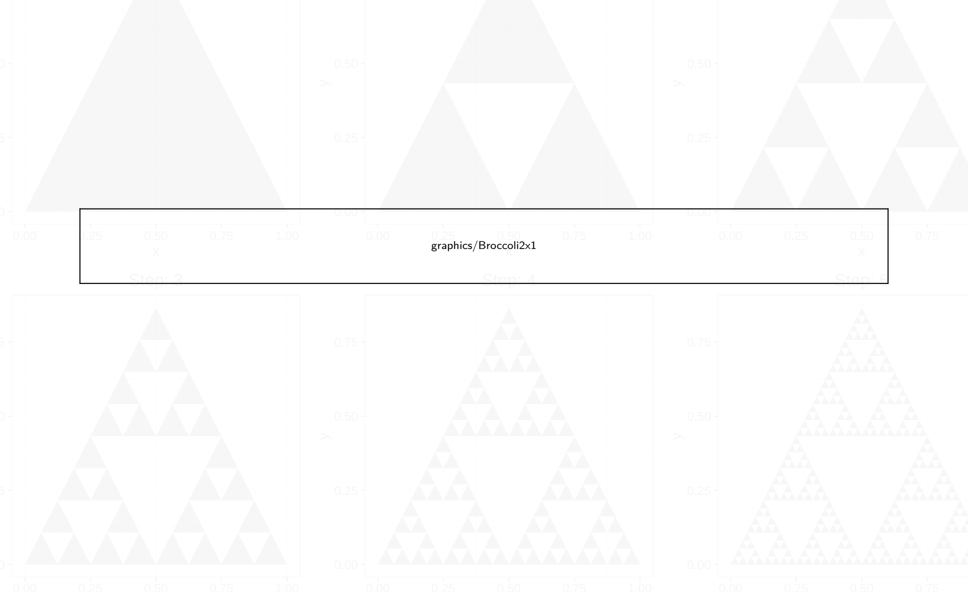
- 'Unabhängig' von der Startmenge S erhalten wir nach hinreichend vielen Schritten immer eine dem Sierpinski Dreieck sehr ähnliche Menge.
- Die collagen $\mathcal{W}^n(S)$ zieht es immer mehr zum Sierpinski Dreieck Δ_∞ hin.
- Unklar: Warum erzeugt das Chaos Game ebenfalls das Sierpinski Dreieck?
- Heuristische Erkärung für den Fall, dass der Startpunkt z_0 schon im Sierpinski Dreieck liegt (Vorlesung: Ergodensatz für das Chaos Game):
  - Unabhängig davon, welche Kugel (welche Funktion) wir im ersten Schritt ziehen, z_1 liegt wieder im Sierpinski Dreieck (ein Mal drin, immer drin).
  - Bei 100.000 Ziehungen erwarten wir mehr als 30.000 Mal jede der Kugeln (Funktionen) gezogen zu haben.
  - In mindestens 30.000 Schritten landen wir also im unteren linken Dreieck der Fläche $\frac{\sqrt{3}}{4}\frac{1}{4}$.
  - In mindestens 30.000 Schritten im unteren rechten Dreieck der Fläche $\frac{\sqrt{3}}{4}\frac{1}{4}$.
  - In mindestens 30.000 Schritten im oberen Dreieck der Fläche $\frac{\sqrt{3}}{4}\frac{1}{4}$.
  - Wir erwarten ebenfalls, jede zwei, jede drei und jede vierelementige Kombination (Bsp: (1,2,3,1)) einige Male gezogen zu haben, daher landen wir auch oft in allen kleineren Dreiecken der Grösse $\frac{\sqrt{3}}{4}\frac{1}{4^4}$.

Fraktale in der Natur



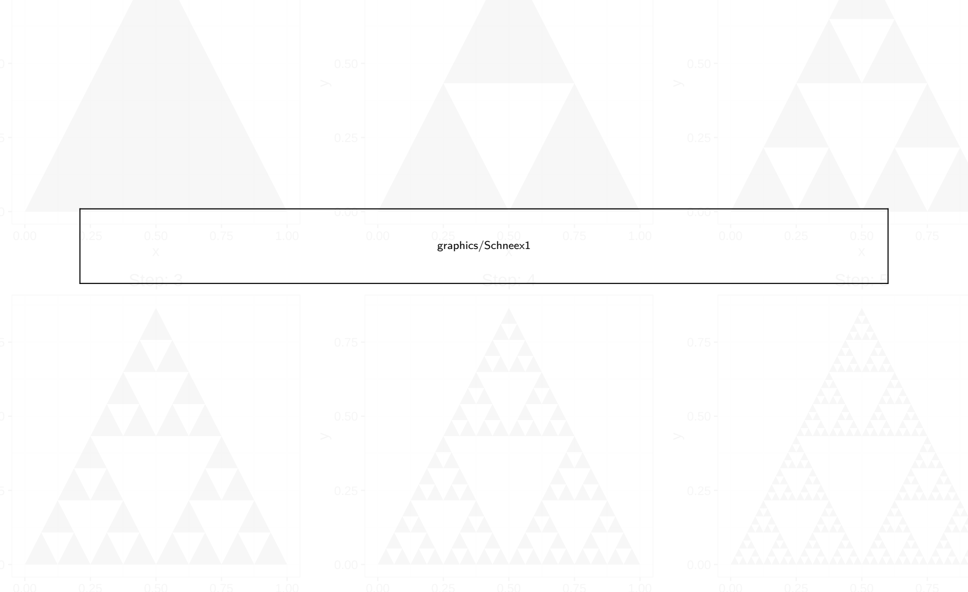
graphics/Schneckex1

Fraktale in der Natur



graphics/Broccoli2x1

Fraktale in der Natur

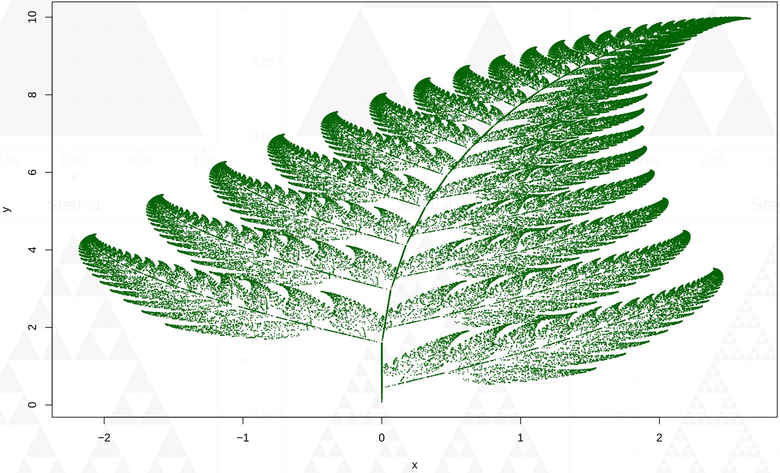


graphics/Schneex1

Fraktale in der Natur

graphics/mandelbrotx1

Fraktale in der Natur

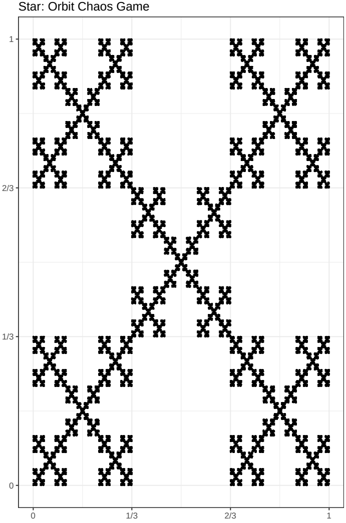


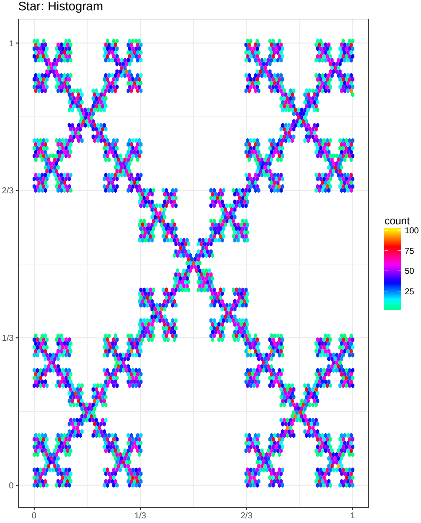
- Das Chaos Game ‘funktioniert’ nicht nur beim Sierpinski Dreieck sondern allgemein bei selbstähnlichen Fraktalen.
- Die folgenden Seiten zeigen weitere selbstähnliche Fraktale: Stern, Wolke, Koch Kurve und Hata Tree.

Übungen (im Laufe der Vorlesung):

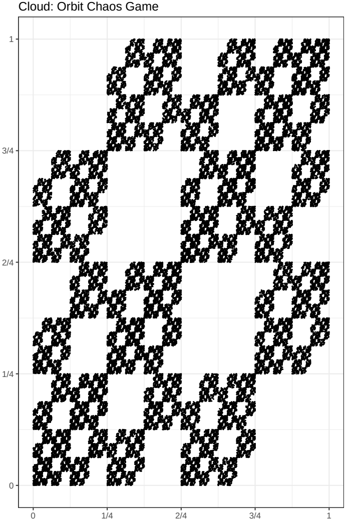
- Finden Sie Iterierte Funktionensysteme (also endlich viele Kontraktionen f_i), die den jeweiligen Fraktalen zugrunde liegen.
- Sie können die Funktionen f_i entweder auf $\mathbb{R}^2$ oder gleich auf $\mathbb{C}$ definieren.
- Geben Sie für jedes der Iterierten Funktionensysteme die Kontraktionskonstanten (Stauchungsfaktoren) an.
- Im Falle der Koch Kurve berechnen Sie ausserdem die Länge der Koch Kurve und die Fläche, die die Kurve mit der x-Achse einschliesst.

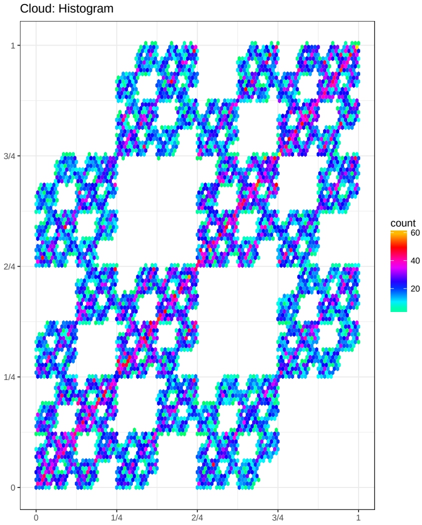
Übungen


Star: Orbit Chaos Game
1
2/3
1/3
0
0
1/3
2/3
1

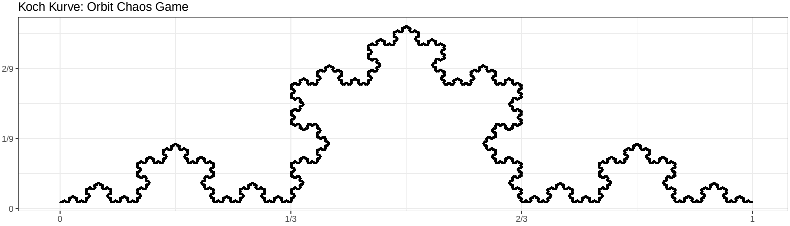

Star: Histogram
1
2/3
1/3
0
0
1/3
2/3
1
count
100
75
50
25

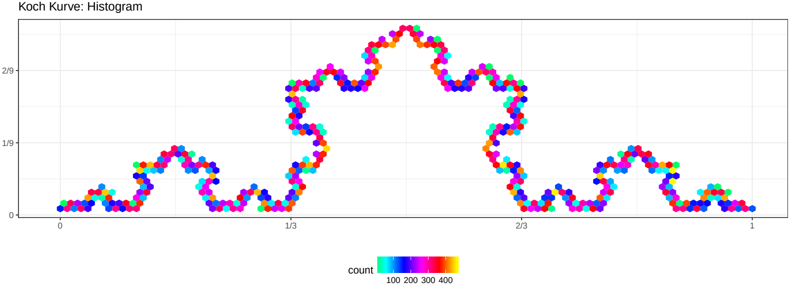
Übungen


Cloud: Orbit Chaos Game
1
3/4
2/4
1/4
0
0
1/4
2/4
3/4
1

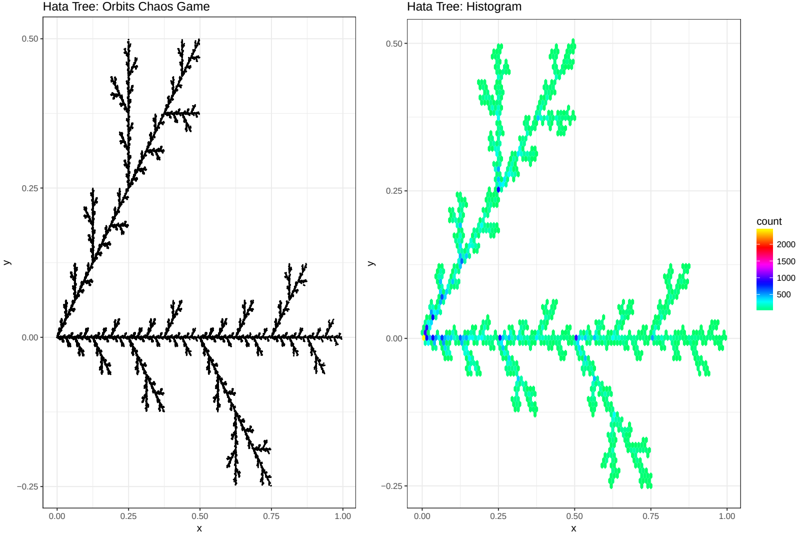

Cloud: Histogram
1
3/4
2/4
1/4
0
0
1/4
2/4
3/4
1
count
60
40
20

Übungen


Koch Kurve: Orbit Chaos Game
2/9
1/9
0
0
1/3
2/3
1

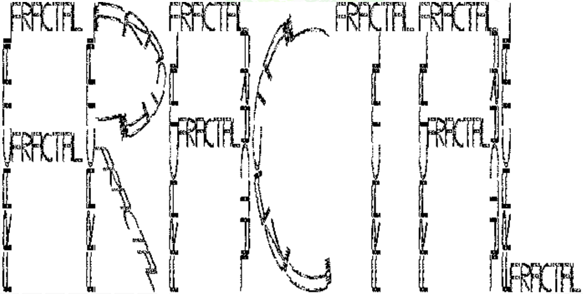

Koch Kurve: Histogram
2/9
1/9
0
0
1/3
2/3
1
count
100 200 300 400

Übungen


Hata Tree: Orbits Chaos Game
Hata Tree: Histogram
0.50
0.25
0.00
−0.25
y
0.00
0.25
0.50
0.75
1.00
x
count
2000
1500
1000
500

Fraktale Worte in Dimension 2 und 3

- Die Konstruktion selbstähnlicher Fraktale mit Hilfe des Chaos Game lässt sich noch viel weiter treiben.
- Im Buch 'Fractals Everywhere' von Michael Barnsley sind unzählige weitere Beispiele angeführt.
- Eines davon zeigt das Wort 'Coke' so geschrieben, dass in jedem Buchstaben wieder das Wort selbst zu lesen ist - selfspelling words.



Fraktale Worte in Dimension 2 und 3

- 2016: Programmierung des R-packages *ChaosGame* zusammen mit M. Schreyer (Doktorandin).
- Weiterentwickelt gemeinsam mit Johannes Bartel und Florian Griessenberger.
- Das package ist open source und kann als add-on der Statistik-Software R installiert werden.
- Das package dient zur Erzeugung fraktaler Worte.
- Der user muss nur das Wort eingeben und ob der plot 2d oder 3d sein soll, alles andere übernimmt das package.
- Zusätzliche einstellbar ist die Anzahl der Punkt, die Fläche auf die projiziert wird, etc.
- Link R-Code zur Generierung fraktaler Wörter

Fraktale Dimensionen

- Das Sierpinski Dreieck ist mindestens eindimensional (es enthält Linien) und höchstens zweidimensional (Teilmenge von $\mathbb{R}$).
- Weder Dimension eins noch Dimension zwei passt.
- Es gibt mehrere Erweiterungen des Dimensionsbegriffs auch nicht ganzzahlige Werte.
- Die bekannteste davon ist die *Hausdorff-Besicovitch Dimension* (Felix Hausdorff, 1918), die auf dem äusseren Hausdorff Mass beruht.
- Für selbstänhliche Mengen ist die Hausdorff-Besicovitch Dimension gleich der sogenannten *Selbstähnlichkeitsdimension*.
- **Schlüsselfrage**: Aus wie vielen geschrumpften Teilen von sich selbst lässt sich die Menge zusammensetzen?
- Gerade Linie der Länge 1 (Dimension $d = 1$):
  - Schrumpfungsfaktor $\frac{1}{2}$: 2 Teile; $2\left(\frac{1}{2}\right)^1 = 1$
  - Schrumpfungsfaktor $\frac{1}{3}$: 3 Teile; $3\left(\frac{1}{3}\right)^1 = 1$

- Einheitsquadrat (Dimension $d = 2$):
  - Schrumpfungsfaktor $\frac{1}{2}$: 4 Teile; $4\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1$
  - Schrumpfungsfaktor $\frac{1}{3}$: 9 Teile; $9\left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1$
- Einheitswürfel (Dimension $d = 3$):
  - Schrumpfungsfaktor $\frac{1}{2}$: 8 Teile; $8\left(\frac{1}{2}\right)^3 = 1$
  - Schrumpfungsfaktor $\frac{1}{3}$: 27 Teile; $27\left(\frac{1}{3}\right)^3 = 1$
- Sierpinski Dreieck Δ_∞:

$$\begin{aligned} 3\left(\frac{1}{2}\right)^d &= 1 \\ 3 &= 2^d \\ d &= \frac{\log 3}{\log 2} \approx 1.58 \end{aligned}$$

- Die Selbstähnlichkeitsdimension von Δ_∞ ist $\frac{\log 3}{\log 2}$.

Fraktale Dimensionen

- Allgemein kann die Hausdorff-Besicovitch Dimension selbstähnlicher Mengen wiefolgt berechnet werden.
- Seien $f_1, f_2, \dots, f_n$ schrumpfende Ähnlichkeitsabbildungen mit Schrumpfungsfaktoren $L_1, L_2, \dots, L_n < 1$, gelte $\bigcup_{i=1}^n f_i(A) = A$ und die Bilder $(f_i(A))_{i=1}^n$ seien (fast) paarweise disjunkt.
- Dann erüllt die Hausdorff-Besicovitch Dimension $dim_H(A)$ der Menge A folgende Gleichung:

$$\sum_{i=1}^{n} L_i^{dim_H(A)} = 1$$

- Bsp: Im Falle des Sierpinski Dreiecks gilt $n = 3$ sowie $L_1 = L_2 = L_3 = \frac{1}{2}$; wir müssen also folgende Gleichung nach s auflösen:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^s + \left(\frac{1}{2}\right)^s + \left(\frac{1}{2}\right)^s = 1$$

und erhalten das schon bekannte Resultat $\frac{\log 3}{\log 2}$.

Übungen:

- Berechnen Sie die Hausdorff Dimension der vier vorhin in der Übung betrachteten Fraktale.
- Ausblick: Was passiert, wenn man die Schrumpfungen leicht ändert?
- Film: Link Transforming dragons