1. Übung am 13. Oktober 2025

[LVA 405.161 UE Statistik, mit (*) versehene Aufgaben sind freiwillig und haben einen erhöhten Schwierigkeitsgrad]

Übungsaufgabe 1 (Aufwärmübung) Beweisen Sie die folgenden zwei Aussagen für Mengenfolgen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}, (B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $(\Omega, \mathcal{A})$:

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty} A_n &= \{x \in \Omega : \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ mit } x \in A_n \text{ für jedes } n \geq n_0\} \\ \limsup_{n\to\infty} A_n &= \{x \in \Omega : x \in A_n \text{ für unendlich viele } n \in \mathbb{N}\}\end{aligned}$$

Übungsaufgabe 2 (2. Aufwärmübung) Berechnen Sie $\liminf_{n\to\infty} A_n$ und $\limsup_{n\to\infty} A_n$ für die folgenden Mengenfolgen in $\mathbb{R}$:

a) $A_n = [0, 1]$ falls n gerade und $A_n = [1, 2]$ falls n ungerade.

b) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle, gegen $x \in \mathbb{R}$ konvergente Folge und A_n, B_n gegeben durch $A_n = (-\infty, x_n], B_n = [x_n, \infty)$.

Sie die Mengenfolgen konvergent?

Übungsaufgabe 3 Wir konstruieren die Mengenfolge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wie folgt (widerholte Entfernung des mittleren Drittels, Skizze hilft):

$$A_1 := [0, 1], A_2 := A_1 \setminus (\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}), A_3 := A_2 \setminus ((\tfrac{1}{9}, \tfrac{2}{9}) \cup (\tfrac{7}{9}, \tfrac{8}{9})), \ldots$$

Berechnen Sie $\liminf_{n\to\infty} A_n$ und $\limsup_{n\to\infty} A_n$. Wie viele Punkte enthält $\liminf_{n\to\infty} A_n$?

Übungsaufgabe 4 Bestimmen Sie $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{E})$ für die folgenden Erzeuger $\mathcal{E}$ und Grundgesamtheiten Ω:

a) $\Omega = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{E} = \{\{1, 3\}\}$

b) $\Omega = \mathbb{Q} = \{q_1, q_2, \ldots\}$, $\mathcal{E} = \big\{\{q_i\} : i \geq k\big\}$ für festes $k \in \mathbb{N}$

c) $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{E} = \big\{[-a, a] : a \in [0, \infty)\big\}$

Übungsaufgabe 5 Weisen Sie für zumindest zwei der 10 verbleibenden Mengensysteme in Lemma 1.14 nach, dass sie Erzeuger der Borel'sche σ-Algebra sind. Orientieren Sie sich dabei an den im Skriptum enthaltenen Beweisen für $\mathcal{E}_1$ und $\mathcal{E}_2$.

Übungsaufgabe 6 Die Voraussetzung, dass $\mathfrak{h}$ ein Halbring ist, ist wesentlich für die Gültigkeit von Satz 1.11: Verwenden Sie folgendes Setup um diese Behauptung zu verifizieren (geeignete Wahl von a und b): $\Omega = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{E} = \{\{1\}, \{1, 2\}\}$, $\mu(\{1\}) = a$, $\mu(\{1, 2\}) = b$.