

2. Übung am 20. Oktober 2025

[LVA 405.163 UE Statistik, Link zur Ankreuzliste siehe www.truttschnig.net/courses mit * versehene Aufgaben sind freiwillig (und in der Regel etwas fordernder)]

Übungsaufgabe 7 (Aufwärmübung) Beweisen Sie Satz 2.12.

Übungsaufgabe 8 Die Indikatorfunktion $\mathbf{1}_A : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$ einer Menge $A \subseteq \Omega$ ist bekanntlich definiert durch

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A, \\ 0 & \text{falls } x \in A^c. \end{cases}$$

Sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge beliebiger Mengen, $\underline{A} := \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$ und $\overline{A} := \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$. Gelten die folgende Gleichungen für jedes $x \in \Omega$?

$$\mathbf{1}_{\underline{A}}(x) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbf{1}_{A_n}(x), \quad \mathbf{1}_{\overline{A}}(x) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{1}_{A_n}(x)$$

Hinweis: Verwenden Sie Übungsaufgabe 1.

Übungsaufgabe 9 Wir betrachten die folgenden zwei Mengensysteme in \mathbb{R}^2 :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 &:= \{(a_1, a_2] \times (b_1, b_2] \subseteq \mathbb{R}^2 : a_1 \leq a_2, b_1 \leq b_2\} \\ \mathcal{E}_2 &:= \{(-\infty, a] \times (-\infty, b] \subseteq \mathbb{R}^2 : a, b \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Sind $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ Halbringe? Beweisen Sie $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{E}_1) = \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{E}_2)$.

Übungsaufgabe 10 Der motivierte Doktorand Max Rechenmann verwendet in einem Beweis folgendes Argument: $\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, \dots\}$ bezeichne die rationalen Zahlen in \mathbb{R} , weiters sei $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine fallende Folge mit Grenzwert 0. Dann gilt wegen der Dichtheit von \mathbb{Q} in \mathbb{R}

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} (q_n - r_n, q_n + r_n) = \mathbb{R}.$$

Stimmt das Argument von Herrn Rechenmann? Wenn nein, warum nicht?

Übungsaufgabe 11 (*) Wir betrachten den Folgenraum $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{N}} =: \Sigma_2$, $\mathcal{E} = \mathcal{O}$ sei die von der Metrik ρ auf Ω induzierte Topologie[†], wobei für $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots), \mathbf{l} = (l_1, l_2, \dots) \in \Omega$ gilt

$$\rho(\mathbf{k}, \mathbf{l}) = \begin{cases} 0 & \text{falls } \mathbf{k} = \mathbf{l} \\ 2^{1 - \min\{i \in \mathbb{N} : k_i \neq l_i\}} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass ρ eine Metrik ist und dass eine Folge $(\mathbf{k}^n)_{n \in \mathbb{N}}$ bezügl. ρ genau dann konvergiert, wenn für jede Koordinate $i \in \mathbb{N}$ gilt: k_i^n konstant ab Index $n_0 = n_0(i) \in \mathbb{N}$ (wir schreiben der Einfachheit halber $\mathbf{k}^n = (k_1^n, k_2^n, k_3^n, \dots)$).

Zeigen Sie weiters, dass die Borel'sche σ -Algebra $\mathcal{B}(\mathcal{O})$ die folgenden Mengen enthält:

- $\{\mathbf{k}\}$ für jedes $\mathbf{k} \in \Sigma_2$.
- $\{\mathbf{k} \in \Sigma_2 : k_i = 1 \text{ für unendlich viele } i \in \mathbb{N}\}$.
- $\{\mathbf{k} \in \Sigma_2 : k_i = 1 \text{ für unendlich viele } i \in \mathbb{N}, k_j = 0 \text{ für unendlich viele } j \in \mathbb{N}\}$.

[†]also das System der offenen Teilmengen von Ω