3. Übung am 03. November 2025

[LVA 405.161 UE Statistik, Link zur Ankreuzliste siehe www.trutschnig.net/courses
mit * versehene Aufgaben sind freiwillig]

Übungsaufgabe 12 Die Lebensdauern X_1 und X_2 zweier Bauteile seien exponentialverteilt mit Parameter $\theta = 1$ und unabhängig. Mit anderen Worten[†]: der Vektor (X_1, X_2) ist absolut stetig mit Dichte $f(x_1, x_2) = 4e^{-(2x_1+2x_2)}\mathbf{1}_{[0,\infty)^2}(x_1, x_2)$.
Berechnen Sie $\mathbb{P}(X_2 < X_1), \mathbb{P}(X_2 = X_1)$ sowie $\mathbb{P}((X_1 - X_2)^2 \leq 1)$.
Hinweis: Eine Skizze (und Beispiel 3.5) hilft.

Übungsaufgabe 13 Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ Borel messbar. Beweisen Sie, dass der Graph von f, definiert durch $\Gamma(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\}$ eine zweidimensionale Borelmenge ist (also dass $\Gamma(f) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ gilt). Ist auch der Endograph $\Gamma^{\leq}(f)$, definiert durch $\Gamma^{\leq}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq f(x)\}$ eine zweidimensionale Borelmenge?
Hinweis: Nachdem die Identität $i(x) = x$ Borel messbar ist, ist auch die Abbildung $\Psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definiert durch

$$\Psi(x, y) := (f(x), y)$$

Borel messbar (warum?). Damit lassen sich beide Fragen sehr einfach beantworten.

Übungsaufgabe 14 Beweisen Sie: Es existiert eine diskrete Zufallsvariable X für die die Verteilungsfunktion F_X strikt wachsend auf $\mathbb{R}$ ist.

Übungsaufgabe 15 Betrachten Sie die folgende Funktion für $a > 0$:

$$F_a(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1 - e^{-ax^2}) & \text{für } x \in [0, \infty) \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass F_a eine Verteilungsfunktion ist und berechnen Sie für $X \sim F_a$ die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(X \leq 1), \mathbb{P}(X \geq 1), \mathbb{P}(X = 1), \mathbb{P}(X < 1), \mathbb{P}(X = 0), \mathbb{P}(X \in \mathbb{Q})$.
Ist F_a absolut stetig?

Übungsaufgabe 16 (Fortsetzung Aufgabe 11) Zeigen Sie, dass die Metrik ρ in Aufgabe 11 sogar eine Ultrametrik ist, dass also nicht nur die Dreiecksungleichung, sondern sogar

$$\rho(\mathbf{k}, \mathbf{l}) \leq \max\{\rho(\mathbf{k}, \mathbf{m}),\ \rho(\mathbf{m}, \mathbf{l})\}$$

für alle $\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m} \in \Sigma_2$ gilt. Zeigen Sie dann, dass jeder Punkt einer ρ-Kugel auch gleichzeitig Mittelpunkt der Kugel ist, i.e., für $\mathbf{k} \in B(\mathbf{m}, r) = \{\mathbf{l} \in \Sigma_2 : \rho(\mathbf{m}, \mathbf{l}) < r\}$ gilt $B(\mathbf{m}, r) = B(\mathbf{k}, r)$.
Ausblick: Ultrametische Räume wie Σ_2 spielen eine wichtige Rolle in der fraktalen Geometrie (siehe Deckblatt des Skriptums).

[†]muss nicht nachgerechnet werden