

## 4. Übung am 10. November 2025

[LVA 405.161 UE Statistik, Link zur Ankreuzliste siehe [www.truttschnig.net/courses](http://www.truttschnig.net/courses) mit \* versehene Aufgaben sind freiwillig]

**Übungsaufgabe 17** Zeigen Sie durch ein Beispiel<sup>†</sup>, dass zwei Zufallsvariable  $X, Y$  auf  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  die gleiche Verteilungsfunktion haben können, obwohl  $X(\omega) \neq Y(\omega)$  für jedes  $\omega \in \Omega$  gilt.

**Übungsaufgabe 18** Beweisen Sie vier der Aussagen 3-9 in Satz 4.12.

**Übungsaufgabe 19** Zeigen Sie, dass für eine unstetige Verteilungsfunktion  $F$  und  $X \sim F$  die Zufallsvariable  $F \circ X$  nicht stetig gleichverteilt auf  $[0, 1]$  sein kann.

**Übungsaufgabe 20** Seien  $F$  und  $G$  seien eindimensionale Verteilungsfunktionen,  $A$  sei eine Copula. Beweisen Sie, dass dann  $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1]$ , definiert durch

$$H(x, y) = A(F(x), G(y)), \quad x, y \in \mathbb{R}$$

eine zweidimensionale Verteilungsfunktion ist.

**Übungsaufgabe 21 (Fortsetzung von Aufgabe 11)** Zeigen Sie, dass sich jede offene Kugel  $B(\mathbf{k}, r)$  in  $(\Sigma_2, \rho)$  in der Form

$$B(\mathbf{k}, r) = \{k_1\} \times \{k_2\} \times \dots \times \{k_n\} \times \{0, 1\} \times \{0, 1\} \times \dots$$

mit geeignetem  $n \in \mathbb{N}$  darstellen lässt und zeigen Sie, dass  $B(\mathbf{k}, r)$  daher auch abgeschlossen ist.

Provokant formuliert: Offene Kugel sind Rechtecke und abgeschlossen.

**Übungsaufgabe 22 (Fortsetzung von Aufgabe 11)** Wir betrachten abermals  $\Sigma_2$ . Zusätzlich sei  $p$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $\mathfrak{p}(\{0, 1\})^\dagger$  mit  $p(\{0\}), p(\{1\}) > 0$ . Für jede Menge  $E$  der Form  $E := E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n \times \Omega_0 \times \Omega_0 \dots$  (also nur höchstens endlich viele  $E_i$  ungleich  $\{0, 1\}$ ) setzen wir

$$\mathbb{P}(E) = \prod_{i=1}^n p(E_i).$$

Über Satz 1.11 (Satz von Caratheodory) lässt sich damit ein eindeutiges Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mathbb{P}$  auf  $\mathcal{B}(\Sigma_2)$  definieren (muss nicht gezeigt werden). Berechnen Sie  $\mathbb{P}(E)$  für die folgenden Mengen  $E$ :

1.  $E = \{\mathbf{k}\}$  für ein beliebiges  $\mathbf{k} \in \Sigma_2$ .
2.  $E = \{\mathbf{k} \in \Sigma_2 : k_i \neq 1 \text{ ab einem Index}\}$ .
3.  $E = \{\mathbf{k} \in \Sigma_2 : k_i = 0 \text{ unendlich oft}\}$

---

<sup>†</sup>geeignete Wahl von  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  und  $X, Y$

<sup>†</sup> $\mathfrak{p}(\{0, 1\})$ ...Potenzmenge von  $\{0, 1\}$