

Rohversion Skriptum (Vers. 2022-01) zur Vorlesung

Fraktale und Zufall

Univ.-Prof. Dr. Wolfgang Trutschnig

www.trutschnig.net

Fachbereich Artificial Intelligence & Human Interaction (AIHI)

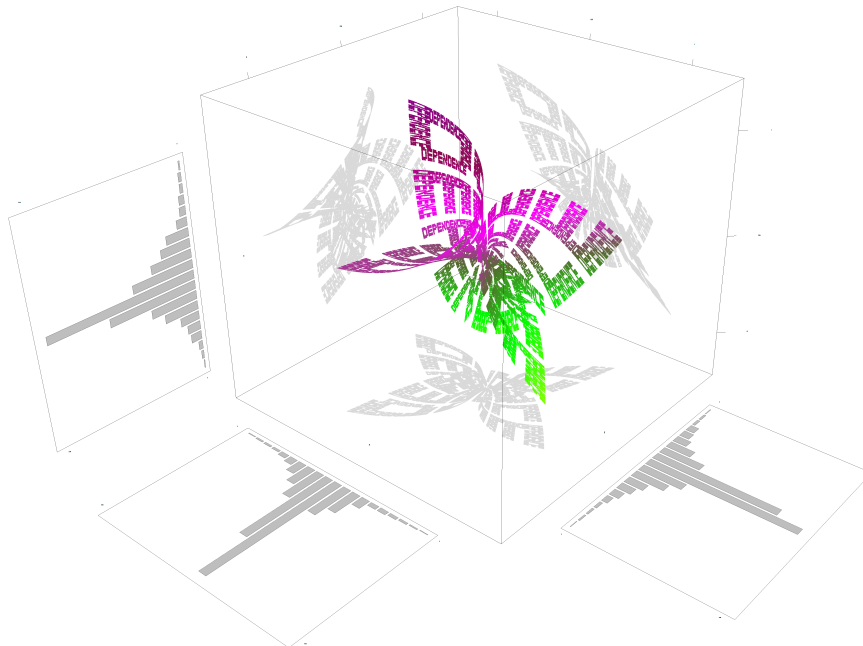
Paris Lodron Universität Salzburg

Hellbrunner Strasse 34

A-5020 Salzburg

basierend auf der 2014er Mitschrift von

M. Happ, F. Kellner, P. Langthaler, H. Ulrich, R. Wellmann



Inhaltsverzeichnis

0	Worum geht's?	3
1	Hausdorff-Metrik und Hyperspace $(\mathcal{K}(\Omega), \delta_H)$	4
2	Iterierte Funktionensysteme (IFS)	12
2.1	IFS	12
3	Codespace und Adress Map	17
3.1	Motivation und Eigenschaften des Codespace Σ_N	17
3.2	Adress Map und ihre Eigenschaften	19
3.3	Exkurs @Diskrete Dynamische Systeme	24
4	IFS mit Wahrscheinlichkeiten (IFSP)	29
4.1	Eigenschaften von IFSP	29
4.2	Ergodizität des Chaos Games	36
	Literatur	40

Kapitel 0

Worum geht's?

Vor dem Lesen des Skriptums empfiehlt es sich, einen Blick auf die die Vorlesung motivierenden Slides zu werfen, siehe Motivation.Fraktale.pdf

Hauptziel der Vorlesung ist es zu klären, warum das Chaos Game (=roter Faden der Lehrveranstaltung) 'funktioniert', warum also bei einem zufälligen Prozess - noch dazu bei der Wahl unterschiedlicher Wahrscheinlichkeiten - immer dieselbe deterministische Struktur (Attraktor, oftmals Fraktal) zum Vorschein kommt. Der Ergodensatz für das Chaos Game (a.k.a. Satz von Elton) klärt genau diese Frage und lässt sich im betrachteten Setting (orts-unabhängiger Auswahlwahrscheinlichkeiten) auch elegant beweisen.

Motiviert vom Chaos Game wird in der Vorlesung zuerst ein Abstandsbegriff für kompakte, nichtleere Mengen $\mathcal{K}(\Omega)$ - die sog. Hausdorff Metrik δ_H - studiert und dann gezeigt, dass der von einem Iterierten Funktionensystem (IFS) induzierte Hutchinson Operator (a.k.a. Collage Operator) eine Kontraktion bezügl. δ_H ist. Unter Verwendung der Vollständigkeit von $(\mathcal{K}(\Omega), \delta_H)$ folgt daraus sofort die Existenz eines eindeutigen (global attraktiven) Fixpunkts A^* , dem sog. Attraktor, der oftmals fraktale Struktur hat.

In vollkommener Analogie wird dann der 'stochastische' Weg zum Attraktor behandelt: Ein Iteriertes Funktionensystem mit Wahrscheinlichkeiten (IFSP) induziert einen sog. Markov Operator im Raum $\mathcal{P}(\Omega)$ der Wahrscheinlichkeitsmaße, der bezügl. einer geeigneten Metrik eine Kontraktion ist. Es existiert daher ein eindeutiges invarianten Maß μ^* , dessen Träger genau A^* ist. Basierend auf dieser Eigenschaft und dem Zusammenhang mit symbolischen dynamischen Systemen wird schließlich der Ergodensatz bewiesen.

Ein kurzer Zwischenabschnitt über chaotische dynamische Systeme vervollständigt die Vorlesung.

Kapitel 1

Hausdorff-Metrik und Hyperspace ($\mathcal{K}(\Omega), \delta_H$)

Generalvoraussetzung 1.1. Falls nicht anders erwähnt bezeichnet im Folgenden (Ω, d) immer einen vollständigen metrischen Raum.

Definition 1.2. Die Familie $\mathcal{K}(\Omega)$, definiert

$$\mathcal{K}(\Omega) := \{K \subseteq \Omega : K \text{ kompakt und nicht leer}\}$$

heißt *Hyperspace*.

Als ersten Schritt überlegen wir uns, wie wir einen sinnvollen Abstandsbegriff auf $\mathcal{K}(\Omega)$ konstruieren können und starten mit dem einfachen Fall von Intervallen in $\Omega = \mathbb{R}$, mit d bezeichnen wir die übliche Euklidische Metrik d_2 : Der Abstand von einem Punkt x zu einem Intervall I ist üblicherweise definiert durch $d(x, I) = \inf_{y \in I} d(x, y)$. Sind $[\underline{a}, \bar{a}]$ und $[\underline{b}, \bar{b}]$ Intervalle in \mathbb{R} , so könnte (Skizze!)

$$d([\underline{a}_1, \bar{b}_1], [\underline{a}_2, \bar{b}_2]) := \sup_{x \in [\underline{a}, \bar{a}]} \inf_{y \in [\underline{a}, \bar{a}]} d(x, y)$$

einen intuitiv sinnvollen Abstandsbegriff liefern.

Definition 1.3. Für $A, B \in \mathcal{K}(\Omega)$ ist $d(A, B)$ definiert durch

$$d(A, B) := \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} d(x, y). \quad (1.1)$$

Es ist leicht einzusehen, dass dieser Abstandsbegriff nicht symmetrisch ist (warum?) und daher keine Metrik sein kann - Symmetrie lässt sich aber leicht erreichen (Abbildung 1 veranschaulicht die Definition von δ_H^\dagger):

Definition 1.4. Die Hausdorff-Metrik $\delta_H : \mathcal{K}(\Omega) \times \mathcal{K}(\Omega) \rightarrow [0, \infty)$ ist definiert durch

$$\delta_H(A, B) := \max\{d(A, B), d(B, A)\} \quad (1.2)$$

Nachdem kompakte Mengen beschränkt sind (warum?), gilt tatsächlich $0 \leq \delta_H(A, B) < \infty$. Im folgenden Lemma überlegen wir uns, dass wir aufgrund der Kompaktheit der betrachteten Menge Supremum und Infimum in Gleichung (1.1) durch Maximum und Minimum ersetzen können.

[†]Quelle: http://en.wikipedia.org/wiki/Hausdorff_distance

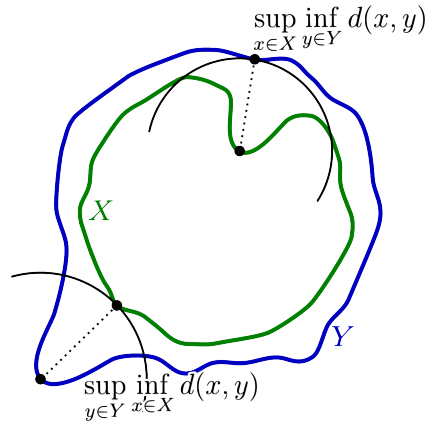


Abbildung 1.1: Illustration der Hausdorff-Metrik für zwei Mengen X (grün) und Y (blau); siehe http://en.wikipedia.org/wiki/Hausdorff_distance

Lemma 1.5. Für $A, B \in \mathcal{K}(\Omega)$ gilt

$$d(A, B) = \max_{x \in A} \min_{y \in B} d(x, y).$$

Beweis. Schritt 1: Sei $x \in A$ beliebig aber fest. Wir zeigen, dass es ein $b \in B$ mit

$$d(x, b) = \inf_{y \in B} d(x, y) = d(x, B)$$

gibt. Nach Definition des Infimums gibt es eine Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in B mit

$$d(x, b_n) \leq d(x, B) + \frac{1}{n}$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$. Kompaktheit von B impliziert die Existenz einer konvergenten Teilfolge $(b_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ mit Grenzwert $b \in B$. Anwendung der Dreiecksungleichung liefert

$$d(x, b) \leq d(x, b_{n_j}) + d(b_{n_j}, b) \leq d(x, B) + \frac{1}{n_j} + d(b_{n_j}, b)$$

woraus für $j \rightarrow \infty$ sofort $d(x, b) \leq d(x, B) \leq d(x, b)$ folgt.

Schritt 2: Definieren wir die Funktion $f : A \rightarrow [0, \infty)$ durch

$$f(x) = d(x, B) = \inf_{b \in B} d(x, b) = \min_{b \in B} d(x, b).$$

dann ist $f \in Lip_1$, i.e.,

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq d(x_1, x_2)$$

für alle $x_1, x_2 \in A$: Tatsächlich impliziert die Dreiecksungleichung für beliebiges $b \in B$ offensichtlich

$$d(x_1, b) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, b),$$

Infimumsbildung liefert daher

$$d(x_1, B) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, B). \quad (1.3)$$

Nachdem

$$d(x_2, B) \leq d(x_1, x_2) + d(x_1, B). \quad (1.4)$$

vollkommen analog folgt, erhalten wir insgesamt

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |d(x_1, B) - d(x_2, B)| \leq d(x_1, x_2)$$

und der Beweis ist komplett, da jede stetige Funktion auf einem Kompaktum ihr Supremum annimmt. \square

δ_H tatsächlich eine Metrik am Hyperspace.

Lemma 1.6. δ_H ist eine Metrik auf $\mathcal{K}(\Omega)$.

Beweis. Wir arbeiten der Reihe nach die Eigenschaften einer Metrik ab: (i) Positivität und Endlichkeit wurde schon vorhin erwähnt.

(ii) Die Äquivalenz $\delta_H(A, B) = 0 \iff A = B$ folgt aus folgender Äquivalenzkette:

$$\begin{aligned} \delta_H(A, B) = 0 &\iff d(A, B) = 0 = d(B, A) \\ &\iff \max_{a \in A} \min_{b \in B} d(a, b) = 0 = \max_{b \in B} \min_{a \in A} d(b, a) \\ &\iff A \subseteq B \wedge B \subseteq A \iff A = B \end{aligned}$$

(iii) Dreiecksungleichung: Seien $A, B, C \in \mathcal{K}(\Omega)$. Gemäß Schritt 2 im Beweis von Lemma 1.5 gilt für alle $a, c \in A$

$$d(a, B) \leq d(a, c) + d(c, B)$$

Infimumsbildung über $c \in C$ liefert daher (warum steht am Ende der ersten Zeile kein inf?)

$$\begin{aligned} d(a, B) &\leq \inf_{c \in C} \{d(a, c) + d(c, B)\} \leq \inf_{c \in C} \{d(a, c)\} + \sup_{c \in C} \{d(c, B)\} \\ &= d(a, C) + \sup_{c \in C} \{d(c, B)\} \\ &= d(a, C) + d(C, B) \end{aligned}$$

Via Maximumsbildung über $a \in A$ folgt daher

$$d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B).$$

Nachdem sich

$$d(B, A) \leq d(B, C) + d(C, A),$$

vollkommen analog zeigen lässt, erhalten wir insgesamt

$$\begin{aligned} \delta_H(A, B) &= \max \{d(A, B), d(B, A)\} \\ &\leq \max \{d(A, C) + d(C, B), d(B, C) + d(C, A)\} \\ &\leq \max \{d(A, C), d(C, A)\} + \max \{d(C, B), d(B, C)\} \\ &= \delta_H(A, C) + \delta_H(B, C), \end{aligned}$$

und der Beweis ist komplett. \square

Die Hausdorff-Metrik lässt sich alternativ auch über sog. ϵ -Umgebung (a.k.a. ϵ -Hüllen) definieren. Wir beginnen mit einigen Vorüberlegungen: Offensichtlich gilt

$$\begin{aligned} d(A, B) \leq \epsilon &\iff \max_{a \in A} \min_{b \in B} d(a, b) \leq \epsilon \\ &\iff \forall a \in A : d(a, B) \leq \epsilon \\ &\iff \forall a \in A : \exists b \in B : d(a, b) \leq \epsilon \end{aligned}$$

Definieren wir die *abgeschlossene ϵ -Umgebung* $\bar{U}(B, \epsilon)$ von B als

$$\bar{U}(B, \epsilon) := \{x \in \Omega : \exists b \in B \text{ mit } d(x, b) \leq \epsilon\}.$$

dann gilt daher offensichtlich die folgende Äquivalenz:

$$d(A, B) \leq \epsilon \iff A \subseteq \bar{U}(B, \epsilon). \quad (1.5)$$

Es scheint daher naheliegend, wie folgt δ_H alternativ zu definieren:

Definition 1.7. Für $A, B \in \mathcal{K}(\Omega)$ ist $\delta'(A, B)$ definiert durch

$$\delta'(A, B) := \inf \{ \epsilon > 0 : A \subseteq \bar{U}(B, \epsilon) \text{ und } B \subseteq \bar{U}(A, \epsilon) \}. \quad (1.6)$$

Wir zeigen, dass das Infimum in Gleichung (1.6) angenommen wird und folgern dann, dass δ' und δ_H identisch sind:

Lemma 1.8. Das Infimum in Gleichung (1.6) wird angenommen, i.e., für alle $A, B \in \mathcal{K}(\Omega)$ gilt

$$\delta'(A, B) = \min \{ \epsilon > 0 : A \subseteq \bar{U}(B, \epsilon) \text{ und } B \subseteq \bar{U}(A, \epsilon) \}.$$

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass für $\epsilon := \delta'(A, B)$ beide Inklusionen $A \subseteq \bar{U}(B, \epsilon)$ und $B \subseteq \bar{U}(A, \epsilon)$ erfüllt sind. Nach Definition des Infimums existiert eine Folge $(\epsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\epsilon_n \rightarrow \epsilon$ und $A \subseteq \bar{U}(B, \epsilon_n)$ sowie $B \subseteq \bar{U}(A, \epsilon_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei $a \in A$ fest. Dann gibt es eine Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in B mit

$$d(a, b_n) \leq \epsilon_n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Kompaktheit B impliziert die Existenz einer konvergenten Teilfolge $(b_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ mit Grenzwert $b \in B$, wir erhalten daher

$$d(a, b) = \lim_{j \rightarrow \infty} d(a, b_{n_j}) \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \epsilon_{n_j} = \epsilon.$$

Für jedes $a \in A$ gilt daher $d(a, B) \leq \epsilon$, woraus sofort $A \subseteq \bar{U}(B, \epsilon)$ folgt. Die Eigenschaft $B \subseteq \bar{U}(A, \epsilon)$ lässt sich vollkommen analog zeigen. \square

Satz 1.9. δ' und δ_H sind identisch, i.e., für beliebige $A, B \in \mathcal{K}(\Omega)$ gilt

$$\delta_H(A, B) = \delta'(A, B). \quad (1.7)$$

Beweis. Direkte Folgerung aus Gleichung (1.5) und Lemma 1.8. \square

Frage 1.10. Gilt für $A \in \mathcal{K}(\Omega)$ und $r > 0$ auch $\bar{U}(A, r) \in \mathcal{K}(\Omega)$?

Lemma 1.11. Für alle $A_1, A_2, B_1, B_2 \in \mathcal{K}(\Omega)$ gilt

$$\delta_H(A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2) \leq \max\{\delta_H(A_1, B_1), \delta_H(A_2, B_2)\} \quad (1.8)$$

Beweis. Nach Definition gilt

$$d(A_1 \cup A_2, B) = \max_{a \in A_1 \cup A_2} d(a, B) = \max\{d(A_1, B), d(A_2, B)\}$$

sowie

$$d(a, B_1 \cup B_2) = \min_{b \in B_1 \cup B_2} d(a, b) = \min\{d(a, B_1), d(a, B_2)\}. \quad (1.9)$$

Wenn wir in Ungleichung (1.9) zum Maximum übergehen, erhalten wir

$$d(A, B_1 \cup B_2) \leq \min\{d(A, B_1), d(A, B_2)\}.$$

Damit ergibt sich insgesamt

$$\begin{aligned} d(A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2) &= \max\{d(A_1, B_1 \cup B_2), d(A_2, B_1 \cup B_2)\} \\ &\leq \max\{\min\{d(A_1, B_1), d(A_1, B_2)\}, \min\{d(A_2, B_1), d(A_2, B_2)\}\} \\ &\leq \max\{d(A_1, B_1), d(A_2, B_2)\} \\ &\leq \max\{d(A_1, B_1), d(B_1, A_1), d(A_2, B_2), d(B_2, A_2)\} \\ &= \max\{\delta_H(A_1, B_1), \delta_H(A_2, B_2)\}. \end{aligned}$$

Die Ungleichung für $d(B_1 \cup B_2, A_1 \cup A_2)$ folgt analog. \square

Satz 1.12. Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_n \in \mathcal{K}(\Omega)$ gilt

$$\delta_H\left(\bigcup_{i=1}^n A_i, \bigcup_{i=1}^n B_i\right) \leq \max\{\delta_H(A_1, B_1), \dots, \delta_H(A_n, B_n)\}. \quad (1.10)$$

Satz 1.13. Sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine fallende Folge in $\mathcal{K}(\Omega)$. Dann konvergiert $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in der

Hausdorff Metrik δ_H gegen $A := \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

Beweis. Wir zeigen zuerst $A \in \mathcal{K}(\Omega)$. A ist als Durchschnitt von abgeschlossenen Mengen selbst abgeschlossen und als abgeschlossene Teilmenge der kompakten Menge $A_1 \in \mathcal{K}(\Omega)$ selbst kompakt. Angenommen $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ wäre leer. Dann folgt sofort

$$A^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c = \Omega \supseteq A_1,$$

die kompakte Menge A_1 wird also überdeckt von der Familie $(A_n^c)_{n \in \mathbb{N}}$ von offenen (nicht-fallenden) Mengen. Kompaktheit von A_1 impliziert daher die Existenz einer endliche Teilüberdeckung, i.e.,

$$\exists M \in \mathbb{N} : \bigcup_{n=1}^M A_n^c \supseteq A_1 \supseteq A_M.$$

Wegen $\bigcup_{n=1}^M A_n^c = A_M^c$ folgt damit $A_M^c \supseteq A_M$, Widerspruch.

Als zweiten Schritt zeigen wir $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_H(A_n, A) = 0$. Nehmen wir indirekt an, dem wäre nicht so, dass also ein $\epsilon > 0$ existiert, so dass für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$

$$\delta_H(A_n, A) \geq \epsilon$$

gilt. Dann existiert also eine Teilfolge $(A_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ mit

$$\delta_H(A_{n_j}, A) \geq \epsilon$$

für alle $j \in \mathbb{N}$. Für jedes $j \in \mathbb{N}$ existiert daher ein $a_{n_j} \in A_{n_j}$ mit $d(a_{n_j}, A) \geq \epsilon$. Nachdem die Folge $(a_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ in A_1 liegt existiert eine konvergente Teilfolge $(a_{n_{j_k}})_{k \in \mathbb{N}}$ mit Grenzwert $a \in A_1$. Die Monotonie von $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ impliziert sogar $a \in A_i$ für jedes $i \in \mathbb{N}$, i.e., es gilt sogar $a \in A$, Widerspruch, und der Beweis ist komplett. \square

Bemerkung 1.14. Aus den Grundvorlesungen wissen Sie (hoffentlich), dass die folgenden Punkte für einen metrischen Raum (Ω, d) äquivalent sind:

- (Ω, d) ist kompakt.
- Jede offene Überdeckung hat eine endliche Teilüberdeckung.
- Jede Folge hat eine konvergente Teilfolge.
- (Ω, d) ist vollständig und totalbeschränkt.

Dabei heisst (Ω, d) totalbeschränkt, genau dann, wenn für jedes $\epsilon > 0$ endlich viele Punkte x_1, \dots, x_n existieren, sodass: $\Omega = \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \epsilon)$ gilt. Die Punkte x_1, \dots, x_n heißen ϵ -Netz.

Satz 1.15. *Angenommen (Ω, d) ist ein vollständiger metrischer Raum. Dann ist auch der Hyperspace $(\mathcal{K}(\Omega), \delta_H)$ vollständig.*

Beweis. Wir müssen zeigen, dass jede Cauchy Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $(\mathcal{K}(\Omega), \delta_H)$ konvergent ist, und werden nicht nur beweisen, dass der Grenzwert A existiert sondern gegeben ist durch

$$A := \bigcap_{m=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{n=m}^{\infty} A_n} \in \mathcal{K}(\Omega).$$

(i) Wir beginnen mit $A \in \mathcal{K}(\Omega)$: Setzen wir $B_m := \overline{\bigcup_{n=m}^{\infty} A_n}$, dann ist $(B_m)_{m \in \mathbb{N}}$ eine fallende Folge abgeschlossener, nichtleerer Mengen. Spätestens seit Bemerkung 1.14 wissen wir, dass B_1 genau dann kompakt ist, wenn B_1 vollständig und totalbeschränkt ist. B_1 ist als abgeschlossene Teilmenge eines vollständigen Raumes ebenfalls vollständig, es reicht daher, Totalbeschränktheit von B_1 zu zeigen.

Sei $\epsilon > 0$ beliebig aber fest. Wir wollen zeigen, dass B_1 mit endlich vielen ϵ -Kugeln überdeckt werden kann. Die Cauchy Eigenschaft von $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ impliziert die Existenz eines $m \in \mathbb{N}$ mit $\delta_H(A_n, A_m) \leq \frac{\epsilon}{4}$ für alle $n \geq m$. Daraus folgt $A_n \subseteq \overline{U(A_m, \frac{\epsilon}{4})}$ für jedes $n \geq m$ und wir erhalten insgesamt

$$B_m = \overline{\bigcup_{n=m}^{\infty} A_n} \subseteq \overline{U(A_m, \frac{\epsilon}{4})} \quad (1.11)$$

A_m ist als kompakte Menge totalbeschränkt, es existieren daher $x_1, \dots, x_q \in A_m$ mit

$$A_m \subseteq \bigcup_{i=1}^q B\left(x_i, \frac{\epsilon}{4}\right). \quad (1.12)$$

Durch (etwaige) Umsortierung der x_i können wir erreichen, dass ein $p \leq q$ existiert, sodass $B\left(x_i, \frac{\epsilon}{2}\right) \cap B_m \neq \emptyset$ für jedes $i \leq p$ und $B\left(x_i, \frac{\epsilon}{2}\right) \cap B_m = \emptyset$ für jedes $i > p$. Für alle $i \leq p$ sei $y_i \in B\left(x_i, \frac{\epsilon}{2}\right) \cap B_m$ und es gilt

$$B_m \subseteq \bigcup_{i=1}^p B(y_i, \epsilon)$$

Tatsächlich folgt für beliebiges aber festes $x \in B_m$ via Gleichung (1.11) die Existenz eines $y \in A_m$ mit $d(x, y) \leq \frac{\epsilon}{4}$ und lt. Ungleichung (1.12) finden wir ein x_i mit $d(x_i, y) < \frac{\epsilon}{4}$. Insgesamt erhalten wir

$$d(x, x_i) \leq d(x, y) + d(x_i, y) < \frac{\epsilon}{2}$$

es folgt also insbesondere $i \leq p$. Anwendung der Dreiecksungleichung liefert

$$d(x, y_i) \leq d(x, y) + d(y, x_i) + d(x_i, y_i) < \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

es existiert also ein $y_i \in B_m$ mit $d(x, y_i) \leq \epsilon$. Nachdem $x \in B_m$ und $\epsilon > 0$ beliebig waren ist B_m also totalbeschränkt. Wegen

$$B_1 = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{m-1} \cup B_m,$$

ist B_1 als endliche Vereinigung von totalbeschränkten Mengen selbst totalbeschränkt, und damit nach den Vorüberlegungen insgesamt sogar kompakt. Damit ist jedes B_i kompakt und Satz 1.13 liefert $A \in \mathcal{K}(\Omega)$.

(ii) Als zweiten (und finalen) Schritt zeigen wir, dass $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tatsächlich gegen A konvergiert. Sei $\epsilon > 0$ beliebig aber fest. Dann existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit

$$\delta_H(A_n, A_m) < \frac{\epsilon}{2}$$

für jedes $n \geq m$. Nachdem für jedes solche $n \geq m$ dann auch $A_n \subseteq \overline{U}\left(A_m, \frac{\epsilon}{2}\right)$ (und umgekehrt) gilt folgt sofort

$$B_m \subseteq \overline{U}\left(A_m, \frac{\epsilon}{2}\right)$$

und damit

$$A \subseteq \overline{U}\left(A_m, \frac{\epsilon}{2}\right) \subseteq \overline{U}(A_m, \epsilon) \quad (1.13)$$

für jedes $n \geq m$.

Umgekehrt sein $x \in A_n$ mit $n \geq m$ fest. Für jedes $k \geq n$ gilt dann $\delta_H(A_k, A_n) < \frac{\epsilon}{2}$, es existiert also ein $x_k \in A_k \subseteq B_q$ mit $d(x_k, x) < \frac{\epsilon}{2}$. Die so erhaltenen Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ (die Folgenglieder vor dem n -ten können frei gewählt werden) liegt (ab einem Index) in B_n , die

Kompaktheit von B_n liefert daher die Existenz einer konvergenten Teilfolge $(x_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$ mit Grenzwert $z \in B_n$. Nachdem $(x_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$ auch ab einem Index in der kompakten Menge B_l mit $l \geq n$ liegt folgt analog $z \in B_l$. Insgesamt erhalten wir $z \in \bigcap_{l \geq n} B_l = A$. Nachdem $x \in A_n$ beliebig war haben wir damit schon $A_n \subseteq \overline{U}(A, \epsilon)$ gezeigt, und die Anwendung von Satz 1.9 beschließt den Beweis. \square

Die Vollständigkeit ist im Folgenden zwar die wichtigste Eigenschaft, die der Hyperspace $(\mathcal{K}(\Omega), \delta_H)$ von (Ω, d) erbt, es ist aber nicht die einzige Eigenschaft:

Satz 1.16. *Sei (Ω, d) kompakt. Dann ist auch $(\mathcal{K}(\Omega), \delta_H)$ kompakt.*

Beweis. Übungsaufgabe \square

Kapitel 2

Iterierte Funktionensysteme (IFS) und der Hutchinson-Operator \mathcal{W}

2.1 IFS

Definition 2.1. Sei (Ω, d) ein metrischer Raum. Eine Funktion

$$f : (\Omega, d) \rightarrow (\Omega, d)$$

heißt Kontraktion genau dann, wenn ein $L < 1$ existiert, sodass für alle $x, y \in \Omega$

$$d(f(x), f(y)) \leq L d(x, y)$$

gilt. Die Zahl L heißt Kontraktionsfaktor von f .

Definition 2.2. Sei (Ω, d) ein vollständiger metrischer Raum und $N \in \mathbb{N}$. Eine endliche Menge $\{f_1, \dots, f_N\}$ von Kontraktionen heißt Iteriertes Funktionensystem (IFS) und wird mit kurz $\{\Omega, (f_i)_{i=1}^N\}$ geschrieben. Bezeichnen L_1, \dots, L_N die Kontraktionsfaktoren der Funktionen f_1, \dots, f_N , dann heißt $L = \max_{i=1, \dots, N} L_i < 1$ der Kontraktionsfaktor des IFS.

Der folgende Operator \mathcal{W} ist uns schon in den einführenden Slides mehrmals begegnet (erinnern Sie sich an die Konstruktion des Sierpinski Dreiecks) und wird in der Literatur auch alternativ oft als ‘Collage’ Operator bezeichnet.

Definition 2.3. Sei $\{\Omega, (f_i)_{i=1}^N\}$ ein IFS. Die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathcal{W} : \mathcal{K}(\Omega) &\rightarrow \mathcal{K}(\Omega), \\ \mathcal{W}(A) &= \bigcup_{i=1}^N f_i(A) \end{aligned}$$

heißt Hutchinson-Operator.

Beachten Sie, dass das stetige Bild einer kompakten Menge wieder kompakt ist. Nachdem die endliche Vereinigung von kompakten Menge wieder kompakt ist, bildet \mathcal{W} also tatsächlich $\mathcal{K}(\Omega)$ in sich selbst ab.

Satz 2.4. Sei (Ω, d) ein vollständiger metrischer Raum und $\{\Omega, (f_i)_{i=1}^N\}$ ein IFS. Dann ist der Hutchinson-Operator \mathcal{W} eine Kontraktion auf $(\mathcal{K}(\Omega), \delta_H)$.

Beweis. Für jedes $i \in \{1, \dots, N\}$ gilt offensichtlich

$$d(f_i(A), f_i(B)) = \max_{a \in A} \min_{b \in B} \underbrace{d(f_i(a), f_i(b))}_{\leq L_i d(a,b) \leq L d(a,b)} \leq L d(A, B) \leq L \delta_H(A, B).$$

Insgesamt erhalten wir daher unter Verwendung von Lemma 1.11

$$\begin{aligned} \delta_H(\mathcal{W}(A), \mathcal{W}(B)) &= \delta_H\left(\bigcup_{i=1}^N f_i(A), \bigcup_{i=1}^N f_i(B)\right) \\ &\leq \max_{i=1, \dots, N} \delta_H(f_i(A), f_i(B)) \leq L \delta_H(A, B), \end{aligned}$$

und der Beweis ist komplett. \square

Korollar 2.5. Sei (Ω, d) ein vollständiger metrischer Raum und $\{\Omega, (f_i)_{i=1}^N\}$ ein IFS. Dann existiert eine eindeutige Menge $A^* \in \mathcal{K}(\Omega)$ mit

$$\mathcal{W}(A^*) = A^*$$

und für alle $A \in \mathcal{K}(\Omega)$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_H(\mathcal{W}^n(A), A^*) = 0.$$

Die Menge A^* heißt den Attraktor des IFS.

Beweis. Nachdem \mathcal{W} eine Kontraktion auf dem vollständigen metrischen Raum $(\mathcal{K}(\Omega), \delta_H)$ ist liefert der Banach'scher Fixpunktsatz sofort die behauptete Existenz eines eindeutigen, global attraktiven Fixpunkts A^* . \square

Bemerkung 2.6. Der Attraktor A^* eines IFS muss nicht immer ein 'Fraktal' sein: Betrachten wir beispielsweise das IFS

$$f_1(x) = \frac{x}{2}, \quad f_2(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{2},$$

dann gilt offensichtlich ist

$$\mathcal{W}([0, 1]) = [0, 1],$$

die Eindeutigkeit des Fixpunkts impliziert daher $A^* = [0, 1]$.

Bemerkung 2.7. Wir betrachten das IFS

$$f_1(x) = \frac{x}{3}, \quad f_2(x) = \frac{x}{3} + \frac{2}{3},$$

dessen Attraktor A^* die Cantormenge C^* ist, C^* erfüllt also $f_1(C^*) \cup f_2(C^*) = C^*$. Gibt es noch weitere Mengen $A \subseteq \mathbb{R}$ mit $f_1(A) \cup f_2(A) = A$? Man kann sich leicht überlegen, dass etwa $\emptyset, \mathbb{R}, [0, \infty), \mathbb{Q}$ diese Fixpunktbedingung erfüllen. Dies widerspricht aber in keinsten Weise der Eindeutigkeit des Attraktors, da keine der Mengen nichtleer und kompakt ist.

Das nächste Resultat zeigt, dass falls $\mathcal{W}(B)$ nahe bei B liegt, B auch schon nahe beim Attraktor A^* liegen muss.

Satz 2.8 (Collage-Theorem). *Sei (Ω, d) ein vollständiger metrischer Raum, $\{\Omega, (f_i)_{i=1}^N\}$ ein IFS mit Kontraktionsfaktor $L < 1$ und Attraktor $A^* \in \mathcal{K}(\Omega)$. Sei $\epsilon > 0$ und $B \in \mathcal{K}(\Omega)$. Dann folgt aus $\delta_H(B, \mathcal{W}(B)) \leq \epsilon$ die Ungleichung*

$$\delta_H(B, A^*) \leq \frac{\epsilon}{1-L}.$$

Beweis. Wir beweisen den Satz in einem allgemeineren Setting und betrachten eine Kontraktion g mit Kontraktionsfaktor $L < 1$ auf einem vollständigen metrischen Raum (Ω, d) und eindeutigem (global attraktiven) Fixpunkt x^* . Angenommen, $x \in \Omega$ erfüllt $d(x, g(x)) \leq \epsilon$. Dann impliziert die Dreiecksungleichung offensichtlich

$$\begin{aligned} d(x, x^*) &\leq d(x, g(x)) + d(g(x), x^*) \\ &= d(x, g(x)) + d(g(x), g(x^*)) \\ &\leq \epsilon + L d(x, x^*), \end{aligned}$$

elementares Umformen der Ungleichung liefert $d(x, x^*) \leq \frac{\epsilon}{1-L}$, und damit das gewünschte Resultat. \square

Die folgende Frage ist naheliegend: Wie verändert sich der Attraktor eines IFS, wenn sich das IFS ‘leicht’ verändert? Führen ‘kleine’ Änderungen des IFS zu kleinen Änderungen des Attraktors?

$$\begin{array}{ccc} \{\Omega, (f_i)_{i=1}^N\} & \approx & \{\Omega, (\hat{f}_i)_{i=1}^N\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ A^* & \stackrel{?}{\approx} & \hat{A}^* \end{array}$$

Wir werden die Fragen positiv beantworten und arbeiten dabei mit der von der Supremumsmetrik d_∞ induzierten natürlichen Abstandsmessung. Dabei arbeiten wir mit folgenden Mengen:

Definition 2.9. *Sei (Ω, d) ein vollständiger metrischer Raum. Für jedes feste $L < 1$ heisst die Menge*

$$\text{Con}_L(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \Omega \mid \forall x, y \in \Omega : d(f(x), f(y)) \leq L d(x, y)\}$$

die Menge aller Kontraktionen mit Kontraktionsfaktor höchstens L .

Sie wissen auf der Analysis, dass $(\text{Con}_L(\Omega), d_\infty)$ ein vollständiger metrischer Raum ist. Damit ist für jedes $N \in \mathbb{N}$ auch $(\text{Con}_L(\Omega)^N, D_\infty)$ ein vollständiger metrischer Raum, wobei D_∞ definiert ist durch

$$D_\infty(F, G) = \max_{i=1, \dots, N} d_\infty(f_i, g_i),$$

mit $F = (f_1, \dots, f_N) \in \text{Con}_L(\Omega)^N$ und $G = (g_1, \dots, g_N) \in \text{Con}_L(\Omega)^N$.

Satz 2.10. Sei (Ω, d) ein vollständiger metrischer Raum und $N \in \mathbb{N}$. Die Abbildung

$$\begin{aligned}\varphi : (\text{Con}_L(\Omega)^N, D_\infty) &\longrightarrow (\mathcal{K}(\Omega), \delta_H) \\ \varphi(F) = \varphi(f_1, \dots, f_N) &= A_F^*,\end{aligned}$$

die jedes IFS auf seinen Attraktor abbildet, ist stetig. Das heißt, der Attraktor ändert sich nur ‘leicht’, wenn wir jede Kontraktion im IFS im Sinne von D_∞ nur ‘leicht’ ändern.

Wir beweisen den Satz mit Hilfe des folgenden, einfachen Lemmas:

Lemma 2.11. Sei (Ω, d) ein vollständiger metrischer Raum und $f, g : \Omega \rightarrow \text{Con}_L(\Omega)$ Kontraktionen mit eindeutigen Fixpunkten x_f^*, x_g^* . Dann gilt

$$d(x_f^*, x_g^*) \leq \frac{1}{1-L} \sup_{x \in \Omega} d(f(x), g(x)) = \frac{1}{1-L} d_\infty(f, g).$$

Beweis. Anwendung der Dreiecksungleichung im Zusammenspiel mit der Fixpunkteigenschaft liefert

$$\begin{aligned}d(x_f^*, x_g^*) &\leq d(x_f^*, f(x_g^*)) + d(f(x_g^*), x_g^*) \\ &= d(f(x_f^*), f(x_g^*)) + d(f(x_g^*), g(x_g^*)) \\ &\leq L d(x_f^*, x_g^*) + \sup_{x \in \Omega} d(f(x), g(x)),\end{aligned}$$

woraus die gewünschte Ungleichung durch elementares Umformen folgt. \square

Beweis von Satz 2.10. Wir zeigen, dass φ das ϵ - δ -Kriterium erfüllt. Sei $\epsilon > 0$ beliebig, aber fix. Setze $\delta = (1-L)\epsilon$, dann folgt für $F, G \in \text{Con}_L(\Omega)^N$ mit $D_\infty(F, G) \leq \delta$ offensichtlich sofort $d_\infty(f_i, g_i) \leq \delta$ für jedes $i \in \{1, \dots, N\}$. Für $A \in \mathcal{K}(\Omega)$ erhalten wir weiters

$$\begin{aligned}\delta_H(\mathcal{W}_F(A), \mathcal{W}_G(A)) &= \delta_H\left(\bigcup_{i=1}^N f_i(A), \bigcup_{i=1}^N g_i(A)\right) \\ &\leq \max_{i=1, \dots, N} \delta_H(f_i(A), g_i(A)) \\ &\leq \max_{i=1, \dots, N} d_\infty(f_i, g_i) \leq \delta,\end{aligned}$$

und damit auch

$$\sup_{A \in \mathcal{K}(\Omega)} \delta_H(\mathcal{W}_F(A), \mathcal{W}_G(A)) \leq \delta.$$

Anwendung von Lemma 2.11 liefert sofort

$$\begin{aligned}\delta_H(\varphi(F), \varphi(G)) = \delta_H(A_F^*, A_G^*) &\leq \frac{1}{1-L} \sup_{A \in \mathcal{K}(\Omega)} \delta_H(\mathcal{W}_F(A), \mathcal{W}_G(A)) \\ &\leq \frac{1}{1-L} \delta = \epsilon,\end{aligned}$$

und der Beweis ist komplett. \square

Wir beschließen diesen Abschnitt mit einem konkreten Beispiel, das Satz 2.10 veranschaulicht:

Beispiel 2.12. Für jedes $t \in [0, 2]$ betrachten wir das IFS $\{\mathbb{R}^2, (f_i^t)_{i=1}^2\}$ mit

$$f_1^t(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{4}) & \sin(\frac{\pi}{4}) \\ -\sin(\frac{\pi}{4}) & \cos(\frac{\pi}{4}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

und

$$f_2^t(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos(\frac{3\pi}{4} - \pi t) & \sin(\frac{3\pi}{4} - \pi t) \\ -\sin(\frac{3\pi}{4} - \pi t) & \cos(\frac{3\pi}{4} - \pi t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 - \frac{t}{2} \\ \frac{t}{2} \end{pmatrix},$$

das offensichtlich Kontraktionsfaktor $L = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$ hat. Nachdem Sinus und Cosinus Lipschitzstetig sind folgt sofort, dass die Abbildung $\psi : [0, 2] \rightarrow \text{Con}_L^2$, definiert durch

$$\psi(t) = (f_1^t, f_2^t)$$

stetig bezüglich D_∞ ist. Satz 2.10 impliziert daher unmittelbar die Stetigkeit der Abbildung $\varphi \circ \psi : [0, 2] \rightarrow \mathcal{K}(\mathbb{R}^2)$, die jedem $t \in [0, 2]$ den Attraktor $A_t^* \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^2)$ des IFS $\{\mathbb{R}^2, (f_i^t)_{i=1}^2\}$ zuordnet, bezüglich δ_H . Mit anderen Worten: Kleine Änderungen von $t \in [0, 2]$ führen zu kleinen Änderungen von $A_t^* = \varphi \circ \psi(t)$.

Obwohl die betrachtete parametrische Familie von IFSen nur IFS mit jeweils 2 Kontraktionen enthält, ergeben sich für A_t^* überraschend komplexe und heterogene Formen, inkl. baumartiger und drachenartiger Mengen. Für $t = 1.81$ ist A_t^* in Abbildung 2.1 skizziert. Die volle Palette von Formen für ein äquidistantes Gitter von 200 Werte aus $[0, 2]$ ist in dem unter diesem Link abrufbaren Video dargestellt.

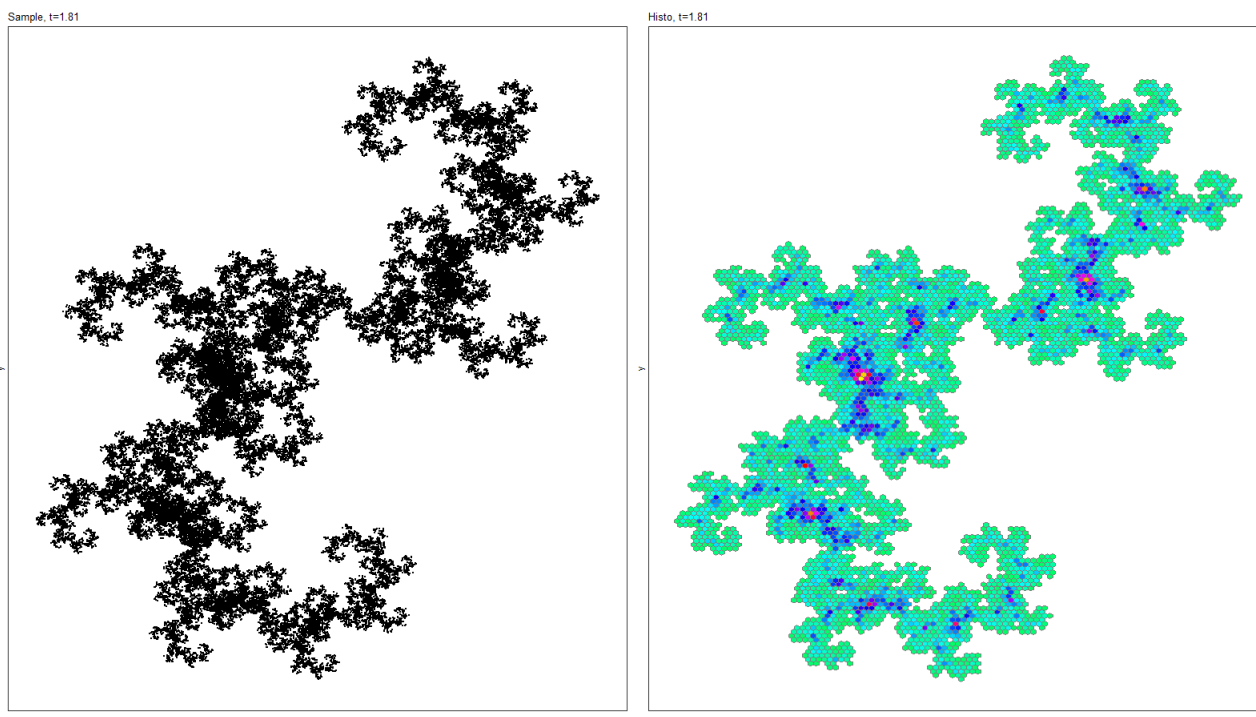


Abbildung 2.1: Der Attraktor A_t^* von dem in Beispiel 2.12 betrachteten IFS $\{\mathbb{R}^2, (f_i^t)_{i=1}^2\}$ mit $t = 1.81$

Kapitel 3

Codespace und Adress Map

3.1 Motivation und Eigenschaften des Codespace Σ_N

Wir betrachten abermals das IFS $\{\mathbb{R}^2, (f_i)_{i=1}^3\}$, das das Sierpinski Dreieck induziert. Dann gilt wegen $\mathcal{W}(A^*) = A^*$ offensichtlich $f_i(A^*) \subseteq A^*$ sowie $\text{diam}(f_i(A^*)) = \frac{1}{2}\text{diam}(A^*)$ für jedes $i \in \{1, 2, 3\}$. Für $k_1, k_2 \in \{1, 2, 3\}$ folgt analog

$$f_{k_1} \circ f_{k_2}(A^*) \subseteq f_{k_1}(A^*) \subseteq A^*.$$

Weitergedacht bedeutet dies, dass für jede Folge $\underline{k} = (k_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \{1, 2, 3\}^{\mathbb{N}} =: \Sigma_3$ die Folge

$$(f_{k_1} \circ f_{k_2} \circ \cdots \circ f_{k_n}(A^*))_{n \in \mathbb{N}}$$

eine fallende Folge kompakter Mengen, deren Durchmesser gegen 0 konvergiert, ist. Das IFS liefert also für jedes $\underline{k} \in \Sigma_3$ eine Folge, die an die Intervallschachtelung aus der Analysis erinnert, von der Sie wissen, dass es genau einen Punkt gibt, der im Durchschnitt liegt. Naheliegenderweise vermuten wir daher, dass auch die Menge

$$M_{\underline{k}} = \bigcap_{n=1}^{\infty} f_{k_1} \circ f_{k_2} \circ \cdots \circ f_{k_n}(A^*) \tag{3.1}$$

eine einpunktige Teilmenge von A^* ist. Wenn dem so wäre, hätten wir eine Abbildung G von $\Sigma_3^{\mathbb{N}}$ in A^* konstruiert. Im Falle der Cantor Menge haben Sie diese Abbildung vermutlich schon kennengelernt da Sie das Standardwerkzeug ist um zu zeigen, dass die Cantormenge überabzählbar ist.

Tatsächlich ist es so, dass obigen Konstruktion für beliebige IFS funktioniert. Bevor wir die Abbildung G allgemein definieren und ihre Eigenschaften studieren, werfen wir einen Blick auf den sog. Codespace Σ_N , der der Schlüssel zu vielen den nachfolgenden Resultaten ist.

Definition 3.1. Sei $N \in \mathbb{N}$. Die Menge

$$\Sigma_N = \{1, \dots, N\}^{\mathbb{N}} = \{\underline{k} = (k_1, k_2, k_3, \dots) : k_i \in \{1, \dots, N\}\}$$

heißt Codespace mit N Symbolen. Die Metrik ρ auf Σ_N ist definiert durch

$$\rho(\underline{k}, \underline{l}) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } \underline{k} = \underline{l}, \\ 2^{1 - \min_{i \in \mathbb{N}} \{i : k_i \neq l_i\}} & \text{wenn } \underline{k} \neq \underline{l}. \end{cases}$$

ρ ist nicht nur eine Metrik, sondern sogar eine sog. Ultrametrik:

Definition 3.2. Eine Metrik d auf Ω heisst Ultrametrik genau dann, wenn sie die folgende stärkere Version der Dreiecksungleichung für alle $x, y, z \in \Omega$ erfüllt:

$$d(x, y) \leq \max\{d(x, z), d(z, y)\} \quad (3.2)$$

Lemma 3.3. ρ ist eine Ultrametrik auf Σ_N .

Beweis. Beachten Sie als erstes, dass für $\underline{k}, \underline{l} \in \Sigma_N$ und $i_0 \in \mathbb{N}$ die folgende Äquivalenz gilt: $\rho(\underline{k}, \underline{l}) \leq 2^{1-i_0}$ genau dann, wenn mindestens die ersten $i_0 - 1$ Stellen von \underline{k} und \underline{l} gleich sind. Für $\underline{k}, \underline{l}, \underline{m} \in \Sigma_N$ mit $\max\{\rho(\underline{k}, \underline{m}), \rho(\underline{m}, \underline{l})\} = 2^{1-i_0}$ folgt daher für $i_0 \geq 2$ sofort, dass die ersten $i_0 - 1$ Stellen von \underline{k} und \underline{m} sowie von \underline{m} und \underline{l} übereinstimmen. Daher stimmen auch die ersten $i_0 - 1$ Stellen von \underline{k} und \underline{l} überein und wir erhalten $\rho(\underline{k}, \underline{l}) \leq 2^{1-i_0}$. Für $i_0 = 1$ ist Ungleichung (3.2) offensichtlich erfüllt, da ρ nur Werte in $[0, 1]$ annimmt. Insgesamt erfüllt ρ daher die stärkere Dreiecksungleichung. Nachdem ρ die verbleibenden Eigenschaften einer Metrik trivialerweise erfüllt ist der Beweis komplett. \square

Eine weitere, häufig betrachtete Metrik auf Σ_N ist gegeben durch

$$\rho_1(\underline{k}, \underline{l}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|k_i - l_i|}{N^i}. \quad (3.3)$$

Nachzurechnen, dass ρ_1 ebenfalls eine Metrik (aber keine Ultrametrik) auf Σ_N ist, ist eine einfache Übungsaufgabe.

Die Metriken ρ und ρ_1 erzeugen die Produkttopologie auf Σ_N , i.e., es gilt das folgende Resultat:

Lemma 3.4. Für jedes feste $N \in \mathbb{N}$ und $\underline{k}, \underline{k}^1, \underline{k}^2, \dots \in \Sigma_N$ sind die folgenden drei Aussagen äquivalent:

1. Für jedes $i \in \mathbb{N}$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} |k_i^n - k_i| = 0$.
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(\underline{k}^n, \underline{k}) = 0$.
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_1(\underline{k}^n, \underline{k}) = 0$.

Beide Metriken ρ und ρ_1 erzeugen daher die Produkttopologie auf Σ_N , die resultierenden metrischen Räume (Σ_N, ρ) und (Σ_N, ρ_1) sind kompakt.

Beweis. Zu zeigen, dass die obigen drei Aussagen äquivalent sind (und damit beide Metriken ρ und ρ_1 die Produkttopologie erzeugen), ist eine gute Übungsaufgabe. Nachdem $\{1, \dots, N\}$ als endliche Teilmenge von \mathbb{R} kompakt ist, ist Σ_N versehen mit der Produkttopologie nach dem Satz von Tychonoff kompakt und das Lemma ist bewiesen. \square

Bevor wir zu IFSen und der Abbildung G zurückkehren leiten wir noch einige (auf den ersten Blick überraschende und wenig intuitive) Eigenschaften von Ultrametrien her.

Lemma 3.5. In jedem ultrametrischen Raum (Ω, d) gelten die folgenden Eigenschaften:

1. Sei $a \in \Omega$ und $r > 0$. Dann gilt für jedes $x \in B(a, r)$ die Gleichheit $B(a, r) = B(x, r)$.
[Jeder Punkt einer Kugel ist Mittelpunkt.]

2. Der Durchmesser $\text{diam}(B(x, r))$ einer offenen Kugel $B(x, r)$ mit Radius r ist r .
3. Jede offene Kugel ist auch abgeschlossen. [Jede offene Kugel ist ‘clopen’...closed and open].

Beweis. (1): Sei $x \in B(a, r)$ beliebig. Dann gilt für jedes $y \in B(a, r)$ offensichtlich

$$d(y, x) \leq \max\{\underbrace{d(y, a)}_{< r}, \underbrace{d(a, x)}_{< r}\} < r,$$

also $y \in B(x, r)$ und damit $B(a, r) \subseteq B(x, r)$. Umgekehrt gilt für jedes $y \in B(x, r)$

$$d(y, a) \leq \max\{\underbrace{d(y, x)}_{< r}, \underbrace{d(x, a)}_{< r}\} < r,$$

also $y \in B(a, r)$ und damit $B(x, r) \subseteq B(a, r)$.

(2): Direkte Konsequenz aus der starken Dreiecksungleichung (3.2).

(3): Sei $a \in \Omega$ und $r > 0$. Wir zeigen, dass $B(a, r)^c$ offen ist, dass also jeder Punkt y von $B(x, r)^c$ ein innerer Punkt ist. Tatsächlich gilt für $y \in B(x, r)^c$ sogar $B(y, r) \subseteq B(a, r)^c$: Wäre nämlich $B(y, r) \cap B(a, r) \neq \emptyset$ dann würde ein $x \in B(y, r) \cap B(a, r)$ existieren, und die Aussage 1) würde sofort $B(x, r) = B(y, r) = B(a, r)$, und damit $d(y, a) < r$ liefern, Widerspruch. $B(a, r)^c$ ist also offen, $(B(a, r)^c)^c = B(a, r)$ daher abgeschlossen. \square

3.2 Adress Map und ihre Eigenschaften

Wir kehren nun zu den Mengen der Form (3.1) und beweisen das folgende, einfache Resultat:

Lemma 3.6. Sei (Ω, d) vollständig und $\{\Omega, (f_i)_{i=1}^N\}$ ein IFS mit Attraktor A^* . Dann ist für jedes $\underline{k} \in \Sigma_N$ die Menge $M_{\underline{k}}$, definiert durch

$$M_{\underline{k}} = \bigcap_{n=1}^{\infty} f_{k_1} \circ f_{k_2} \circ f_{k_3} \circ \cdots \circ f_{k_n}(A^*)$$

einpunktig und es gilt $M_{\underline{k}} \subseteq A^*$.

Beweis. Wir wissen schon aus den Vorüberlegungen, dass die Folge $(f_{k_1} \circ f_{k_2} \circ \cdots \circ f_{k_n}(A^*))_{n \in \mathbb{N}}$ eine fallende Folge kompakter Mengen ist. Wegen

$$\text{diam}(f_{k_1} \circ f_{k_2} \circ \cdots \circ f_{k_n}(A^*)) \leq L^n \underbrace{\text{diam}(A^*)}_{< \infty}$$

enthält $M_{\underline{k}}$ einerseits höchstens einen Punkt. Andererseits liefert Satz 1.13 sofort $M_{\underline{k}} \neq \emptyset$, die Menge $M_{\underline{k}}$ ist daher, wie behauptet, einpunktig. \square

Das folgende wichtige Resultat zeigt, dass die zuvor schon angedeutete Funktion $G : \Sigma_N \rightarrow A^*$ auch alternativ mit nur einem Punkt (der nicht einmal in A^* liegen muss) als Startmenge definiert werden kann.

Lemma 3.7. *Gegeben sei ein IFS $\{\Omega, (f_i)_{i=1}^N\}$, weiters sei $z \in \Omega$ beliebig, aber fest. Dann ist durch*

$$G^z(\underline{k}) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_{k_1} \circ f_{k_2} \circ f_{k_3} \circ \cdots \circ f_{k_n}(z)$$

eine Abbildung $G^z : \Sigma_N \rightarrow \Omega$ definiert. Für beliebige $y, z \in \Omega$ und jedes $\underline{k} \in \Sigma_N$ gilt $G^z(\underline{k}) = G^y(\underline{k})$, die Abbildung ist also unabhängig von der konkreten Wahl des Startpunkts z .

Beweis. Wir beweisen das Lemma in drei Schritten:

Schritt 1: Wir zeigen, für jedes $\underline{l} \in \Sigma_N$ ist die Menge

$$\{f_{l_1} \circ f_{l_2} \circ \cdots \circ f_{l_n}(z) : n \in \mathbb{N}\}$$

beschränkt. Wegen $\{z\} \in \mathcal{K}(\Omega)$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_H(\mathcal{W}^n(\{z\}), A^*) = 0,$$

es existiert daher ein Index $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\mathcal{W}^n(\{z\}) \subseteq \overline{U}(A^*, 1)$ für jedes $n \geq n_0$. Daher folgt, dass für jedes $n \geq n_0$ auch

$$f_{l_1} \circ f_{l_2} \circ \cdots \circ f_{l_n}(z) \in \mathcal{W}^n(\{z\}) \subseteq \overline{U}(A^*, 1)$$

gilt, die Menge $\{f_{l_1} \circ f_{l_2} \circ \cdots \circ f_{l_n}(z) : n \in \mathbb{N}\}$ ist also beschränkt.

Schritt 2: Für jedes $\underline{k} \in \Sigma_N$ und $z \in \Omega$ ist die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$x_n := f_{k_1} \circ f_{k_2} \circ \cdots \circ f_{k_n}(z)$$

eine Cauchy-Folge. Tatsächlich gilt offensichtlich für jedes $m > n$

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &= d\left(f_{k_1} \circ f_{k_2} \circ \cdots \circ f_{k_n}(z), f_{k_1} \circ f_{k_2} \circ \cdots \circ f_{k_n} \circ f_{k_{n+1}} \circ \cdots \circ f_{k_m}(z)\right) \\ &\leq L^{n-1} d\left(f_{k_n}(z), f_{k_n} \circ f_{k_{n+1}} \circ \cdots \circ f_{k_m}(z)\right) \\ &\leq L^{n-1} \text{diam}(\{f_{l_1} \circ \cdots \circ f_{l_n}(z) : n \in \mathbb{N}\}). \end{aligned}$$

Gemäß Schritt 1 konvergiert der letzte Ausdruck für $n \rightarrow \infty$ gegen 0. Für jedes $\epsilon > 0$ existiert daher ein Index $n_0 \in \mathbb{N}$ sodass $d(x_n, x_m) < \epsilon$ für alle $n, m \geq n_0$. Mit anderen Worten: $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge. Die Vollständigkeit von Ω liefert daher die Existenz eines eindeutigen Grenzwerts $x \in \Omega$ mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x, f_{k_1} \circ \cdots \circ f_{k_n}(z)) = 0.$$

Schritt 3: Gelte $z \neq y \in \Omega$. Dann folgt unter Anwendung der Kontraktionseigenschaft sofort

$$d(f_{k_1} \circ f_{k_2} \circ \cdots \circ f_{k_n}(y), f_{k_1} \circ f_{k_2} \circ \cdots \circ f_{k_n}(z)) \leq L^n d(y, z).$$

Nachdem die rechte Seite für $n \rightarrow \infty$ gegen 0 konvergiert folgt unter Verwendung von Schritt 2 sofort

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_{k_1} \circ f_{k_2} \circ \cdots \circ f_{k_n}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_{k_1} \circ f_{k_2} \circ \cdots \circ f_{k_n}(y),$$

und der Beweis ist komplett. \square

Definition 3.8. Gegeben sei ein IFS $\{\Omega, (f_i)_{i=1}^N\}$. Dann heisst die durch ($z \in \Omega$ beliebig)

$$G(\underline{k}) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_{k_1} \circ f_{k_2} \circ \cdots \circ f_{k_n}(z)$$

definierte Abbildung $G : \Sigma_N \rightarrow \Omega$ die vom IFS induzierte Adress Map.

Das folgende Theorem fasst die wichtigsten Eigenschaften von G zusammen - eine der Inklusionen der ersten Aussage ist in Anbetracht unserer Vorüberlegungen in keinsten Weise überraschend:

Satz 3.9. Gegeben sei ein IFS $\{\Omega, (f_i)_{i=1}^N\}$. Dann hat die Adress Map $G : \Sigma_N \rightarrow \Omega$ die folgenden Eigenschaften:

1. $G(\Sigma_N) = A^*$.

2. G ist stetig.

Beweis. Wir unterteilen den Beweis abermals in drei Schritte.

Schritt 1: Wir zeigen $G(\Sigma_N) \subseteq A^*$: Wegen $G(\underline{k}) = G^x(\underline{k})$ für alle $x \in \Omega$ und $\underline{k} \in \Sigma_N$, und der Tatsache, dass für $x \in A^*$ auch

$$f_{k_1} \circ f_{k_2} \circ \cdots \circ f_{k_n}(x) \in A^*$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt, folgt sofort

$$G(\underline{k}) := G^z(\underline{k}) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_{k_1} \circ f_{k_2} \circ \cdots \circ f_{k_n}(z) \in A^*.$$

Schritt 2: Wir zeigen, dass G stetig ist: Sei dazu $\epsilon > 0$ beliebig, aber fest. Wir wählen ein (minimales) $i_0 \in \mathbb{N}$ mit $L^{i_0} \text{diam} A^* < \epsilon$ und setzen $\delta < 2^{-i_0}$. Dann folgt für $\underline{k} \neq \underline{l}$ mit $\rho(\underline{k}, \underline{l}) < \delta$ sofort, dass die ersten i_0 Stellen von \underline{k} und \underline{l} gleich sind und wir erhalten unter Verwendung der Kontraktionseigenschaft für $n > i_0$

$$\begin{aligned} d\left(f_{k_1} \circ \cdots \circ f_{k_n}(x), f_{l_1} \circ \cdots \circ f_{l_n}(x)\right) &\leq L^{i_0} d\left(\underbrace{f_{k_{i_0+1}} \circ \cdots \circ f_{k_n}(x)}_{\in A^*}, \underbrace{f_{l_{i_0+1}} \circ \cdots \circ f_{l_n}(x)}_{\in A^*}\right) \\ &\leq L^{i_0} \text{diam}(A^*) < \epsilon, \end{aligned}$$

G ist also stetig.

Schritt 3: Als letzten Schritt zeigen wir $G(\Sigma_N) = A^*$. Nachdem $G(\Sigma_N)$ als stetiges Bild einer kompakten Menge wieder kompakt und klarerweise nichtleer ist, genügt es ob der Eindeutigkeit des Fixpunkts von \mathcal{W} in $\mathcal{K}(\Omega)$, die Gleichheit $\mathcal{W}(G(\Sigma_N)) = G(\Sigma_N)$ zu zeigen.

(i) Für $z \in \mathcal{W}(G(\Sigma_N))$ existiert offensichtlich ein $\underline{k} \in \Sigma_N$ und ein $k_0 \in \{1, \dots, N\}$ mit $z \in f_{k_0}(G(\underline{k}))$. Die Stetigkeit von f_{k_0} impliziert daher sofort ($s \in A^*$ beliebig)

$$z = f_{k_0}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_{k_1} \circ \cdots \circ f_{k_n}(s)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_{k_0} \circ f_{k_1} \circ \cdots \circ f_{k_n}(s) \in G(\Sigma_N)$$

Nachdem $z \in \mathcal{W}(G(\Sigma_N))$ beliebig war, folgt direkt $\mathcal{W}(G(\Sigma_N)) \subseteq G(\Sigma_N)$.

(ii) Umgekehrt sei nun $w \in G(\Sigma_N)$ beliebig, aber fest. Dann existiert ein $\underline{k} \in \Sigma_N$ mit $G(\underline{k}) = w$ und wir erhalten ($s \in A^*$ wie zuvor beliebig)

$$\begin{aligned} w &= \lim_{n \rightarrow \infty} f_{k_1} \circ f_{k_2} \circ \cdots \circ f_{k_n}(s) \stackrel{f_{k_1} \text{ stetig}}{=} f_{k_1}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_{k_2} \circ \cdots \circ f_{k_n}(s)\right) \\ &= f_{k_1}(G((k_2, k_3, \dots))) \in \mathcal{W}(G(\Sigma_N)), \end{aligned}$$

und damit die zweite Inklusion. □

Bemerkung 3.10. Für sog. total unzusammenhängende IFS ist $G : \Sigma_N \rightarrow A^*$ sogar ein Homöomorphismus: Betrachten wir zum Beispiel das IFS $\{[0, 1], (f_i)_{i=1}^2\}$ der Cantormenge C^* , definiert durch $f_1(x) = \frac{x}{3}$ und $f_2(x) = \frac{x}{3} + \frac{2}{3}$, dann gilt offensichtlich $f_1(C^*) \cap f_2(C^*) = \emptyset$, die Abbildung G ist daher injektiv. G ist also eine stetige Bijektion von Σ_2 nach C^* und als solche sogar ein Homöomorphismus. Mit anderen Worten: Σ_2 und C^* sind ‘topologisch gleich’. Im nächsten Abschnitt werden wir großteils mit total unzusammenhängenden IFSen arbeiten.

Definition 3.11. Sei $\{\Omega, (f_i)_{i=1}^N\}$ ein IFS mit Attraktor $A^* \in \mathcal{K}(\Omega)$ und $G : \Sigma_N \rightarrow \Omega$ die entsprechende Adress Map. Dann heißt für jedes $x \in A^*$ die (abgeschlossene) Menge $G^{-1}(\{x\})$ die Adressmenge (Menge aller Adressen) von x .

Die Adressen einiger Punkte sind offensichtlich: Der (eindeutige) Fixpunkt x_i^* der Kontraktion f_i hat wegen

$$G((i, i, i, \dots)) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_i^n(x_i^*) = x_i^*$$

die Adresse (i, i, i, \dots) . Damit ergibt sich via

$$G((k, i, i, i, \dots)) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_k \circ f_i^n(x_i^*) = f_k(x_i^*)$$

sofort, dass der Punkt mit Adresse (k, i, i, i, \dots) genau $f_k(x_i^*)$ ist.

Beispiel 3.12. Welcher Punkt der Cantormenge C^* hat Adresse $\underline{k} = (121212\dots)$? Aus obigen Vorüberlegungen und der Tatsache, dass jede Verkettung von Kontraktionen wieder eine Kontraktion ist folgt sofort, dass der gesuchte Punkt der Fixpunkt von $f_1 \circ f_2$ sein muss. Mit anderen Worten, der gesuchte Punkt x erfüllt

$$\frac{1}{9}x + \frac{2}{9} = f_1 \circ f_2(x) = x$$

woraus sofort $x = \frac{1}{4} \in C^*$ folgt.

Der folgende Operator wird im Rest der Vorlesung eine sehr prominente Rolle einnehmen:

Definition 3.13 (Linksshiftoperator). Der Operator $\sigma : \Sigma_N \rightarrow \Sigma_N$, definiert durch

$$\sigma((k_1, k_2, k_3, \dots)) := ((k_2, k_3, k_4, \dots))$$

heißt Linksshiftoperator.

Das folgende Resultat ist nach obigen Vorüberlegungen wenig überraschend:

Satz 3.14. Gegeben sei ein IFS $\{\Omega, (f_i)_{i=1}^N\}$ mit Attraktor A^* und Adress Map G . Dann gilt für alle $m \in \mathbb{N}$ die folgende Gleichheit:

$$G(\underline{k}) = f_{k_1} \circ \dots \circ f_{k_m} \left(G(\sigma^m(\underline{k})) \right).$$

Beweis. Die Behauptung folgt durch einfaches Nachrechnen unter Verwendung der Stetigkeit der involvierten Kontraktionen:

$$\begin{aligned} G(\underline{k}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} f_{k_1} \circ f_{k_2} \circ \dots \circ f_{k_n}(x) \\ &= f_{k_1} \circ f_{k_2} \circ \dots \circ f_{k_m} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_{k_{m+1}} \circ \dots \circ f_{k_n}(x) \right) \\ &= f_{k_1} \circ f_{k_2} \circ \dots \circ f_{k_m} \left(G(\sigma^m(\underline{k})) \right). \end{aligned}$$

□

Zusammenfassend haben wir also gezeigt, dass das folgende Diagramm kommutativ ist (Pfeile mit Doppelspitze symbolisieren Surjektivität):

$$\begin{array}{ccc}
 (\Sigma_N, \rho) & \xrightarrow{\sigma} & (\Sigma_N, \rho) \\
 \downarrow G & \text{stetig} & \downarrow G \\
 (A^*, d) & \xleftarrow{f_{k_1}} & (A^*, d)
 \end{array}$$

Es gilt also für jedes $\underline{k} \in \Sigma_N$ insbesondere die Gleichheit

$$G(\underline{k}) = f_{k_1} \circ G \circ \sigma(\underline{k}). \quad (3.4)$$

Definition 3.15. Gegeben sei ein IFS $\{\Omega, (f_i)_{i=1}^N\}$ mit Attraktor A^* und Adress Map G . Wir nennen $x \in A^*$ periodisch genau dann, wenn es eine Adresse $\underline{k} \in G^{-1}(\{x\}) \subseteq \Sigma_N$ von x gibt, die bezüglich σ periodisch ist, i.e., wenn es ein $p \in \mathbb{N}$ mit $\sigma^p(\underline{k}) = \underline{k}$ gibt. Im folgenden bezeichnet $\text{Per}(\sigma)$ die periodischen Punkte in Σ_N .

Beispiel 3.16. Wir betrachten wieder die Cantormenge C^* und speziell $0 \in C^*$. Dann gilt offensichtlich $G^{-1}(\{0\}) = (1111\dots)$, der Punkt 0 ist also periodisch. Wegen $\frac{1}{3} \in C^*$ und $\implies G^{-1}(\{\frac{1}{3}\}) = (122222\dots)$ ist $\frac{1}{3}$ nicht periodisch.

Allgemein liegen die periodischen Punkte dicht in A^* - es gilt folgender Satz:

Satz 3.17. Sei $\{\Omega, (f_i)_{i=1}^N\}$ ein IFS mit Attraktor $A^* \in \mathcal{K}(\Omega)$ und Adress Map $G : \Sigma_N \rightarrow \Omega$. Dann liegen die periodischen Punkte dicht in A^* .

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass $\text{Per}(\sigma)$ dicht in Σ_N ist und betrachten dafür $\underline{k} \in \Sigma_N$ und $r > 0$ beliebig aber fest. Dann existiert ein $i_0 \in \mathbb{N}$ mit $2^{-i_0} < r$ und es folgt

$$\begin{aligned}
 B(\underline{k}, r) &\supseteq B\left(\underline{k}, \frac{1}{2^{i_0}}\right) = \left\{ \underline{l} \in \Sigma_N : \rho(\underline{k}, \underline{l}) < \frac{1}{2^{i_0}} \right\} \\
 &= \{ \underline{l} \in \Sigma_N : l_1 = k_1, l_2 = k_2, \dots, l_{i_0} = k_{i_0} \}
 \end{aligned}$$

Offensichtlich liegt der i_0 -periodische Punkte $(k_1, k_2, \dots, k_{i_0}, k_1, k_2, \dots, k_{i_0}, \dots)$ in $B(\underline{k}, \frac{1}{2^{i_0}})$, es gilt also $\text{Per}(\sigma) \cap B(\underline{k}, r) \neq \emptyset$ und die behauptete Dichtheit ist gezeigt.

Per definitionem ist jeder Punkt in $G(\text{Per}(\sigma)) \subseteq A^*$ periodisch, es genügt daher die Gleichheit $\overline{G(\text{Per}(\sigma))} = A^*$ nachzuweisen. Letztere folgt aber sofort aus

$$A^* = G(\Sigma_N) = \overline{G(\Sigma_N)} \supseteq \overline{G(\text{Per}(\sigma))} \stackrel{G \text{ stetig}}{\supseteq} G(\overline{\text{Per}(\sigma)}) = G(\Sigma_N) = A^*,$$

und der Beweis ist komplett. □

3.3 Exkurs @Diskrete Dynamische Systeme

Betrachten wir abermals die Cantormenge C^* , dann gilt für jedes $x \in C^*$ offensichtlich folgende Aussage: Für jedes $x \in C^*$ existiert genau ein $i \in \{1, 2\}$ mit $x \in f_i(C^*)$ und, wegen der Injektivität der beiden Kontraktionen, genau ein $y \in C^*$ mit $x = f_i(y)$. Auf diese Art und Weise kann offensichtlich eine Abbildung $S : C^* \rightarrow C^*$ konstruiert werden, deren chaotische Eigenschaften wir in der Folge studieren werden. Dabei werden wir nur mit sog. total unzusammenhängenden IFSen bestehend aus Injektionen arbeiten.

Definition 3.18. Ein IFS $\{\Omega, (f_i)_{i=1}^N\}$ heißt total unzusammenhängend genau dann, wenn $f_i(A^*) \cap f_j(A^*) = \emptyset$ für alle $i \neq j$ gilt. Wir sagen, dass das $\{\Omega, (f_i)_{i=1}^N\}$ die Disjunktheitsbedingung erfüllt genau dann, wenn es total unzusammenhängend ist die enthaltenen f_1, \dots, f_n injektiv sind.

Satz 3.19. Falls das IFS $\{\Omega, (f_i)_{i=1}^N\}$ die Disjunktheitsbedingung erfüllt, dann ist $G : \Sigma_N \rightarrow A^*$ ein Homöomorphismus.

Beweis. Sei $\underline{k} \neq \underline{l}$ und $i_0 \in \mathbb{N}$ der kleinste Index mit $k_{i_0} \neq l_{i_0}$. Angenommen, es gilt $G(\underline{k}) = G(\underline{l})$. Dann folgt für $x \in A^*$ (beliebig) gemäß Satz 3.14 sofort

$$\begin{aligned} f_{k_1} \circ \dots \circ f_{k_{i_0-1}} \circ f_{k_{i_0}} \circ G \circ \sigma^{i_0}(\underline{k}) &= G(\underline{k}) = G(\underline{l}) = f_{l_1} \circ \dots \circ f_{l_{i_0-1}} \circ f_{l_{i_0}} \circ G \circ \sigma^{i_0}(\underline{l}) \\ &= f_{k_1} \circ \dots \circ f_{k_{i_0-1}} \circ f_{l_{i_0}} \circ G \circ \sigma^{i_0}(\underline{l}), \end{aligned}$$

und die vorausgesetzte Injektivität der Kontraktionen liefert sofort

$$f_{k_{i_0}} \circ \underbrace{G \circ \sigma^{i_0}(\underline{k})}_{\in A^*} = f_{l_{i_0}} \circ \underbrace{G \circ \sigma^{i_0}(\underline{l})}_{\in A^*}.$$

Nachdem $\{\Omega, (f_i)_{i=1}^N\}$ nach Voraussetzung total unzusammenhängend ist gilt $f_{k_{i_0}}(A^*) \cap f_{l_{i_0}}(A^*) = \emptyset$, Widerspruch! Für $\underline{k} \neq \underline{l}$ gilt also $G(\underline{k}) \neq G(\underline{l})$, die Adress Map G ist also injektiv. Zusammenfassend ist $G : \Sigma_N \rightarrow A^*$ eine stetige Bijektion, die Kompaktheit von Σ_N impliziert daher (einfache Übungsaufgabe) auch die Stetigkeit der Inversen $G^{-1} : A^* \rightarrow \Sigma_N$, insgesamt ist $G : \Sigma_N \rightarrow A^*$ daher ein Homöomorphismus. \square

Für ein IFS $\{\Omega, (f_i)_{i=1}^N\}$, das die Disjunktheitsbedingung erfüllt, definieren wir, wie vorhin erwähnt, die Abbildung $S : A^* \rightarrow A^*$ wie folgt in 2 Schritten (umgangssprachlich könnte man sagen, wir suchen für jedes $x \in A^*$ seinen Vorgänger/Ursprung $y = S(x)$):

1. Für festes $x \in A^*$ existiert genau ein $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ mit $x \in f_i(A^*)$.
2. Wegen der Injektivität der Kontraktionen existiert genau ein $y \in A^*$ mit $x = f_i(y)$.
Wir setzen $S(x) := y$.

Hauptziel dieses Abschnitts ist es zu klären, welche Eigenschaften $S : \Sigma_N \rightarrow A^*$ hat, also insbesondere ob S stetig ist, ob die periodischen Punkte von S in A^* dicht liegen, und ob S topologisch transitiv ist. Schlüssel zur Beantwortung dieser Fragen ist das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc}
 (\Sigma_N, \rho) & \xrightarrow{\sigma} & (\Sigma_N, \rho) \\
 \downarrow G \text{ stetig} & & \text{stetig} \downarrow G \\
 (A^*, d) & \xrightarrow{S} & (A^*, d)
 \end{array}$$

Gemäß Diagramm gilt für jedes $\underline{k} \in \Sigma_N$ die folgende Gleichheit

$$G \circ \sigma(\underline{k}) = S \circ G(\underline{k}), \tag{3.5}$$

oder, äquivalent dazu, die Gleichheit (setze $x := G(\underline{k})$)

$$G \circ \sigma \circ G^{-1}(x) = S(x). \tag{3.6}$$

Aus Gleichung (3.6) folgt insbesondere $S^2(x) = G \circ \sigma \circ G^{-1} \circ G \circ \sigma \circ G^{-1}(x) = G \circ \sigma^2 \circ G^{-1}(x)$ und allgemein

$$G \circ \sigma^n \circ G^{-1}(x) = S^n(x), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.7}$$

Mit anderen Worten: S (bzw. S^n) kann einfach auf σ (σ^n) ‘übersetzt’ werden, wir sagen, dass die dynamischen Systeme (Σ_N, ρ, σ) und (A^*, d, S) *topologisch konjugiert* sind.

Bemerkung 3.20. Eine solche Übersetzung eines dynamischen Systems in ein anderes, einfacher zu handhabendes System, kennen Sie auch schon aus der Linearen Algebra: Beispielsweise ist jede symmetrische $d \times d$ -Matrix M orthogonal ähnlich einer Diagonalmatrix Δ , i.e., es existiert eine orthogonale Matrix U (die Matrix der Eigenvektoren) mit

$$M = U\Delta U^t = U\Delta U^{-1}.$$

Dieser Basiswechsel hat den Vorteil, dass insbesondere M^n sehr einfach über $M^n = U\Delta^n U^t$ berechnet werden kann, da die Potenzen der Diagonalmatrix Δ trivial zu bestimmen sind. Soll beispielsweise die d -dimensionale Differentialgleichung $\dot{\mathbf{x}} = M\mathbf{x}$ gelöst werden, dann kann die Lösung $\mathbf{x}(t) = e^{Mt}\mathbf{c} = (\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(Mt)^i}{i!})\mathbf{c}$ und die darin vorkommenden Potenzen M^i direkt über die Diagonalisierung von M berechnet werden.

Wir starten mit einigen allgemeinen Definitionen betreffend Eigenschaften einer Abbildung T auf einem metrischen Raum (Ω, d) und überlegen uns dann, welche Eigenschaften S auf A^* (und σ auf Σ_N) erfüllt.

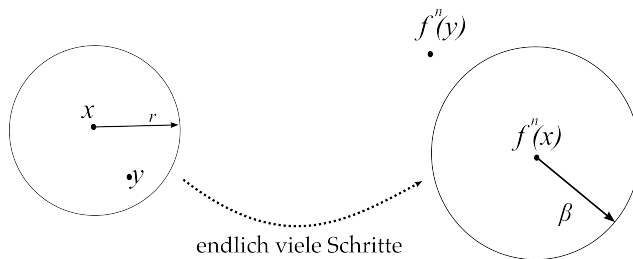
Definition 3.21. Sei (Ω, d) ein metrischer Raum und $T : \Omega \rightarrow \Omega$ eine Transformation. Dann heißt die Menge $O_T^+(x) := \{T^n(x) : n \in \mathbb{N}_0\}$ der T -Orbit von x (kurz ‘Orbit von x ’).

Die erste Eigenschaft wird volkstümlich auch oft als Schmetterlingseffekt bezeichnet - beliebige kleine Änderungen der Anfangsbedingungen führen nach ausreichend langer Zeit zu abweichenden ‘Pfadern’.

Definition 3.22. Eine Transformation T auf (Ω, d) heißt sensitiv genau dann wenn, wenn eine Konstante $\beta > 0$ existiert, sodass für jedes $x \in \Omega$ und jedes $r > 0$ ein $y \in B(x, r)$ und ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$d(T^n(x), T^n(y)) \geq \beta$$

existieren.



Die zweite Eigenschaft untersucht, ob ‘man von überall auch überall hinkommt’.

Definition 3.23. Eine (stetige) Transformation T auf (Ω, d) heißt topologisch transitiv genau dann, wenn für beliebige nichtleere offene Mengen $U, V \subseteq \Omega$ ein Index $n \in \mathbb{N}$ mit

$$T^{-n}(U) \cap V \neq \emptyset$$

existiert.

Wenn eine (stetige) Transformation gleichzeitig reguläres Verhalten (‘überall’ liegen periodische Punkte) und irreguläres Verhalten (man kommt von ‘überall auch überall hin’ und reagiert sensitiv auf die Anfangsbedingungen) aufweist, dann spricht man von einer chaotischen Abbildung:

Definition 3.24. T auf (Ω, d) heißt chaotisch genau dann, wenn T topologisch transitiv und sensitiv ist, und die periodischen Punkte dicht liegen.

Wir starten mit den ersten Eigenschaften von $S : A^* \rightarrow A^*$.

Satz 3.25. Angenommen, das IFS $\{\Omega, (f_i)_{i=1}^N\}$ erfüllt die Disjunktheitsbedingung. Dann ist S stetig und die periodischen Punkte von S liegen dicht in A^* .

Beweis. Offensichtlich ist $\sigma : \Sigma_N \rightarrow \Sigma_N$ Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante 2. Gemäß unserer Vorüberlegungen gilt $G \circ \sigma \circ G^{-1} = S$, die Abbildung S ist daher als Verkettung dreier stetigen Abbildungen selbst stetig.

Zum Beweis der zweiten Aussage überlegen wir uns zuerst, dass für $G(\underline{k}) = x$ folgende Äquivalenz gilt: $S^n(x) = x$ genau dann, wenn $\sigma^n(\underline{k}) = \underline{k}$. Tatsächlich liefert Gleichung (3.7) für $S^n(x) = x$ sofort

$$G \circ \sigma^n \circ G^{-1}(x) = S^n(x) = x = G \circ G^{-1}(x),$$

woraus wegen der Injektivität von G und $G^{-1}(x) = \underline{k}$ sofort $\sigma^n(\underline{k}) = \underline{k}$ folgt. Die umgekehrte Inklusion folgt analog.

Seien nun $x \in A^*$ und $r > 0$ beliebig aber fest. Es genügt zu zeigen, dass $B(x, r)$ mindestens einen periodischen Punkt von S enthält. Die Stetigkeit von G impliziert die Offenheit von $V := G^{-1}(B(x, r))$. Nachdem die periodischen Punkte von σ dicht in Σ_N liegen folgt sofort $\text{Per}(\sigma) \cap V \neq \emptyset$. Für jedes $p \in \text{Per}(\sigma) \cap V \neq \emptyset$ ist aber $G(p)$ ein periodischer Punkt von S , der in $B(x, r)$ liegt, und der Beweis ist komplett. \square

Um zu zeigen, dass $S : A^* \rightarrow A^*$ topologisch transitiv ist, zeigen wir zuerst die topologische Transitivität von σ auf Σ_N und übersetzen dann auf S :

Satz 3.26. σ ist topologisch transitiv auf (Σ_N, ρ) .

Beweis. Für offenen, nichtleere Teilmenge U, V von Σ_N existieren $\underline{k}, \underline{l} \in \Sigma_N$ und $r > 0$ mit $B(\underline{k}, r) \subseteq U$ und $B(\underline{l}, r) \subseteq V$. Zusätzlich existiert offensichtlich ein Index $j_r \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{2^{j_r}} < r$ und wir erhalten

$$\{\underline{m} \in \Sigma_N : \underline{m}_i = \underline{k}_i \forall i \leq j_r\} = B\left(\underline{k}, \frac{1}{2^{j_r}}\right) \subseteq U$$

$$\{\underline{m} \in \Sigma_N : \underline{m}_i = \underline{l}_i \forall i \leq j_r\} = B\left(\underline{l}, \frac{1}{2^{j_r}}\right) \subseteq V.$$

Betrachten wir die Folge

$$\underline{m} := (l_1, l_2, l_3, \dots, l_{j_r}, k_1, k_2, k_3, \dots, k_{j_r}, 1, 1, 1, \dots),$$

dann erfüllt \underline{m} offensichtlich $\underline{m} \in V \cap \sigma^{-n}(U)$ für $n := j_r$. \square

Wir zeigen eine noch stärkere (Mischungs-) Eigenschaft von σ :

Satz 3.27. Es existiert ein $\underline{l} \in \Sigma_N$, dessen σ -Orbit $\{\sigma^n(\underline{l}) : n \in \mathbb{N}\} = O^+(\underline{l})$ dicht liegt in (Σ_N, ρ) .

Beweis. Wir beweisen die Aussagen der Einfachheit halber nur für den Fall $N = 2$, die allgemeine Konstruktion funktioniert vollkommen analog. Betrachte die Folge \underline{l} , die zuerst alle ‘Worte’ der Länge 1, dann alle Worte der Länge 2, dann alle Worte der Länge 3 usw. enthält.

$$\underline{l} = (12 \ 11221221 \ 111222122121211212112221 \ \dots)$$

\underline{l} enthält also jedes Wort endlicher Länge (die Anordnung der Worte ist sekundär).

Zu zeigen, dass $O^+(\underline{l})$ dicht liegt, ist nun einfach: Betrachte $\underline{k} \in \Sigma_N$ und $r > 0$ beliebig aber fest. Dann existiert ein minimales $i_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$B(\underline{k}, r) \supseteq B(\underline{k}, 2^{-i_0}) = \{\underline{o} \in \Sigma_N : o_1 = k_1, o_2 = k_2, \dots, o_{i_0} = k_{i_0}\}.$$

Das ‘Wort’ (k_1, \dots, k_{i_0}) tritt irgendwo in \underline{l} auf, bezeichne n den Index von \underline{l} , an dem das ‘Wort’ beginnt. Offensichtlich erfüllt dann $\sigma^{n-1}(\underline{l}) \in B(\underline{k}, 2^{-i_0})$ und der Beweis ist erbracht. \square

Als direkte Konsequenz erhalten wir folgende noch stärkere Aussage:

Satz 3.28. Die Menge aller Punkte $\underline{l} \in \Sigma_N$, deren σ -Orbit $\{\sigma^n(\underline{l}) : n \in \mathbb{N}\} = O^+(\underline{l})$ dicht liegt in (Σ_N, ρ) ist selbst dicht.

Beweis. Folgt sofort aus der Tatsache, dass, falls \underline{l} dichten Orbit hat, auch jeder Punkt $\sigma^i(\underline{l})$ mit $i \in \mathbb{N}$ dichten Orbit hat. \square

Satz 3.29. Sei $\{\Omega, (f_i)_{i=1}^N\}$ ein IFS, das die Disjunktheitsbedingung erfüllt. Dann ist die Menge aller Punkte $x \in A^*$, deren S -Orbit $\{S^n(x) : n \in \mathbb{N}\} = O_S^+(x)$ dicht liegt in (A^*, d) , selbst dicht in A^* .

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass in jeder Kugel $B(x, r)$ mit $x \in A^*$ und $r > 0$ mindestens ein Punkt mit dichtem Orbit liegt. Die Stetigkeit von G impliziert, dass $V := G^{-1}(B(x, r)) \neq \emptyset$ eine offene Teilmenge von (Σ_N, ρ) ist. Gemäß Satz 3.28 existiert mindestens ein Punkt $\underline{k} \in V$, dessen σ -Orbit dicht liegt. Setzen wir $z = G(\underline{k}) \in A^*$, dann folgt sofort $z \in B(x, r)$ und der S -Orbit von z ist dicht in A^* , weil der σ -Orbit von \underline{k} dicht liegt in Σ_N . \square

Obiges Resultat liefert sofort die topologische Transitivität von $S : A^* \rightarrow A^*$:

Satz 3.30. *Sei $\{\Omega, (f_i)_{i=1}^N\}$ ein IFS, das die Disjunktheitsbedingung erfüllt. Dann ist $S : A^* \rightarrow A^*$ topologisch transitiv.*

Beweis. Seien U, V zwei, nicht leere offene Menge in (A^*, d) . Dann existiert lt. Satz 3.29 ein Punkt $x \in V$, der dichten Orbit, und daher nach endlichen vielen Schritten $n \in \mathbb{N}$ auch U ‘besucht’. Daraus folgt sofort $T^{-n}(U) \cap V \neq \emptyset$. \square

Als nächstes analysieren wir S hinsichtlich Sensitivität, starten abermals mit dem Code Space, und σ und übersetzen dann auf S .

Satz 3.31. *Der Shift-Operator σ ist sensitiv auf (Σ_N, ρ) .*

Beweis. Sei $\underline{k} \neq \underline{l}$, dann folgt mit $i_0 := \min\{i : k_i \neq l_i\}$ und $n := i_0 - 1$ sofort $\rho(\sigma^n(\underline{k}), \sigma^n(\underline{l})) = 1$. Setzen wir $\beta = 1$ (und damit sogar gleich dem Durchmesser von (Σ_N, ρ)) dann ist σ also sensitiv. \square

Satz 3.32. *Sei $\{\Omega, (f_i)_{i=1}^N\}$ ein IFS, das die Disjunktheitsbedingung erfüllt. Dann ist S sensitiv auf A^* .*

Beweis. Für $i \neq j$ gilt nach Voraussetzung $f_i(A^*) \cap f_j(A^*) = \emptyset$, die Kompaktheit von $f_l(A^*)$ für jedes $l \in \{1, \dots, N\}$ liefert daher sofort (durchdenken!)

$$\beta_{i,j} := \min\{d(x, y) : x \in \underbrace{f_i(A^*)}_{\in \mathcal{K}(\Omega)}, y \in \underbrace{f_j(A^*)}_{\in \mathcal{K}(\Omega)}\} > 0$$

Wir setzen $\beta := \min\{\beta_{i,j} : i \neq j\} > 0$ und zeigen Sensitivität für dieses β . Sei dafür $x \in A^*$, $r > 0$ und $y \in B(x, r)$ mit $x \neq y$. Da G ein Homöomorphismus ist, folgt sofort

$$\underline{k} := G^{-1}(x) \neq G^{-1}(y) =: \underline{l}.$$

Für $i_0 := \min\{i \in \mathbb{N} : k_i \neq l_i\}$ und $S^{i_0-1}(x), S^{i_0-1}(y)$ folgt daher

$$\begin{aligned} S^{i_0-1}(x) &= S^{i_0-1}(G(\underline{k})) = G(\sigma^{i_0-1}(\underline{k})) \in f_{k_{i_0}}(A^*) \\ S^{i_0-1}(y) &= S^{i_0-1}(G(\underline{l})) = G(\sigma^{i_0-1}(\underline{l})) \in f_{l_{i_0}}(A^*), \end{aligned}$$

und damit $d(S^{i_0-1}(x), S^{i_0-1}(y)) \geq \beta_{k_{i_0}, l_{i_0}} \geq \beta > 0$. \square

Satz 3.33. *Sei $\{\Omega, (f_i)_{i=1}^N\}$ ein IFS, das die Disjunktheitsbedingung erfüllt. Dann ist S chaotisch auf A^* .*

Um zu beweisen, dass (Disjunktheitsbedingung vorausgesetzt) S chaotisch auf A^* hätten wir uns auch etwas Arbeit sparen können: Es lässt sich zeigen, dass Sensitivität aus topologischer Transitivität und der Eigenschaft, dass die periodischen Punkte dicht liegen, folgt (gute Übungsaufgabe).

Kapitel 4

IFS mit Wahrscheinlichkeiten (IFSP)

4.1 Eigenschaften von IFSP

Wir kehren nochmals zurück zum Hutchinson Operator und betrachten der Einfachheit halber wieder das schon bekannte IFS $\{\mathbb{R}^2, (f_i)_{i=1}^3\}$ des Sierpinski Dreiecks. Wählen wir $A = \{z_0\} \in \mathbb{R}^2$, dann folgt

$$\mathcal{W}(A) = \{f_1(z_0), f_2(z_0), f_3(z_0)\} = \{f_{k_1}(z_0) : k_1 \in \{1, 2, 3\}\}$$

sowie

$$\mathcal{W}^2(A) = \{f_{k_2} \circ f_{k_1}(z_0) : k_1, k_2 \in \{1, 2, 3\}\},$$

und allgemein

$$\mathcal{W}^n(A) = \{f_{k_n} \circ \dots \circ f_{k_2} \circ f_{k_1}(z_0) : k_1, k_2, \dots, k_n \in \{1, 2, 3\}\}.$$

Betrachten wir statt z_0 das Dirac Maß δ_{z_0} in z_0 , definiert durch

$$\delta_{z_0}(B) = \mathbf{1}_B(z_0), \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2),$$

dann erhalten wir $\mathcal{W}(\{z_0\})$ auch als Menge aller Punkte $y \in \mathbb{R}^2$, für die ein $k_1 \in \{1, 2, 3\}$ existiert mit $y = f_{k_1}(z_0)$. Mit anderen Worten

$$\mathcal{W}(\{z_0\}) = \left\{ y \in \mathbb{R}^2 : \sum_{i=1}^3 \delta_{z_0}^{f_i}(\{y\}) > 0 \right\} = \left\{ y \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \delta_{z_0}^{f_i}(\{y\}) > 0 \right\},$$

wobei $\delta_{z_0}^{f_i}$ das Bildmaß (push-forward) von δ_{z_0} unter f_i bezeichnet[†]. Stochastisch Interpretation: wenn man zufällig (gemäß der diskreten Gleichverteilung auf $\{1, 2, 3\}$) eine Funktion f_i ‘zieht’ und dann auf $\{z_0\}$ anwendet, dann ist $\mathcal{W}(\{z_0\})$ genau die Menge aller in einem Schritt erreichbaren Punkte. Offensichtlich ist

$$\frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \delta_{z_0}^{f_i}$$

[†] also $\delta_{z_0}^{f_i}(B) = \delta_{z_0}(f_i^{-1}(B))$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$, das sich via IFS aus dem Wahrscheinlichkeitsmaß δ_{z_0} ergibt; das IFS induziert also auch eine Abbildung in der Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße. Motiviert durch das Chaos-Game (siehe R-Code) und obigen Vorüberlegungen landen wir bei folgenden Definitionen:

Definition 4.1. Sei $\{\Omega, (f_i)_{i=1}^N\}$ ein IFS und $(p_1, \dots, p_N) \in [0, 1]$. Dann heisst das Tripel $\{\Omega, (f_i)_{i=1}^N, (p_i)_{i=1}^N\}$ Iteriertes Funktionensystem mit Wahrscheinlichkeiten (IFSP) genau dann, wenn $p_1, \dots, p_N > 0$ und $\sum_{i=1}^N p_i = 1$ gilt.

Mit anderen Worten: Ein IFSP ist ein IFS zusammen mit einer diskreten Verteilung p auf $\{1, \dots, N\}$ mit $p(\{i\}) = p_i > 0$ für jedes $i \in \{1, \dots, N\}$.

Definition 4.2 (Markov-Operator). Sei $\{\Omega, (f_i)_{i=1}^N, (p_i)_{i=1}^N\}$ ein IFSP. Bezeichnen wir mit $\mathcal{P}(\Omega)$ ist die Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathcal{B}(\Omega)$, dann heißt $(\mu^{f_i} \dots \text{Bildmaß von } \mu \text{ unter } f_i)$

$$\begin{aligned} \mathcal{V} : \mathcal{P}(\Omega) &\longrightarrow \mathcal{P}(\Omega) \\ \mathcal{V}(\mu)(B) &= \sum_{i=1}^N p_i \mu^{f_i}(B) \end{aligned} \quad (4.1)$$

der vom IFSP auf $\mathcal{P}(\Omega)$ induzierte Markov-Operator.

Rückblickend auf den Hutchinson Operator \mathcal{W} haben wir zwecks Analyse des asymptotischen Verhaltens von $\mathcal{W}^n(A)$ zuerst eine Abstandsmessung δ_H auf kompakten, nichtleeren Mengen konstruiert, gezeigt, dass $(\mathcal{K}(\Omega), \delta_H)$ vollständig ist, und dann bewiesen, dass \mathcal{W} bezüglich δ_H eine Kontraktion ist - der Rest folgte dann sofort aus dem Banach'schen FPS. Beim Markov Operator \mathcal{V} gehen wir nun vollkommen analog vor und starten mit der Konstruktion einer Metrik - der Einfachheit halber arbeiten wir in diesem Abschnitt nur mit kompakten metrischen Räumen (Ω, d) (eine Erweiterung auf vollständige metrische Räume ist mit mehr Grundlagen unschwer machbar):

Definition 4.3 (Kantorovich/Wasserstein Metrik). Sei (Ω, d) kompakt und $\mu, \nu \in \mathcal{P}(\Omega)$. Dann heißt

$$\delta_K(\mu, \nu) := \min \left\{ \sup \left\{ \int_{\Omega} h d\mu - \int_{\Omega} h d\nu : h \in Lip_1(\Omega) \right\}, 1 \right\}$$

mit $Lip_1(\Omega) := \{h : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : |h(x) - h(y)| \leq d(x, y) \text{ für alle } x, y \in \Omega\}$ der Kantorovich/Wasserstein Abstand von μ und ν .

Lemma 4.4. Sei (Ω, d) kompakt. Dann ist δ_K ist eine Metrik auf $\mathcal{P}(\Omega)$.

Beweis. Die Nichtnegativität folgt δ_K folgt sofort aus der Tatsache, dass die Einsfunktion $h = \mathbf{1}_{\Omega}$ in $Lip_1(\Omega)$ liegt. Zusätzlich ist δ_K per definitionem nach oben mit 1 beschränkt. Um zu zeigen, dass aus $\delta_K(\mu, \nu) = 0$ auch $\mu = \nu$ folgt, gehen wie wie folgt vor: Offensichtlich impliziert $\delta_K(\mu, \nu) = 0$ (unter Verwendung von $h \in Lip_1(\Omega)$ genau dann wenn $-h \in Lip_1(\Omega)$) die Gleichheit

$$\int_{\Omega} h d\mu = \int_{\Omega} h d\nu \quad (4.2)$$

für alle $h \in Lip_1(\Omega)$. Für eine beliebige Lipschitz-stetige Funktion $h : \Omega \rightarrow \Omega$ mit Lipschitz Konstante $L \in (0, \infty)$ gilt offensichtlich $\hat{h} := \frac{h}{L} \in Lip_1(\Omega)$ und wir erhalten aus der Gleichheit für $Lip_1(\Omega)$ sofort

$$\int_{\Omega} h d\mu = L \int_{\Omega} \frac{h}{L} d\mu = L \int_{\Omega} \frac{h}{L} d\nu = \int_{\Omega} h d\nu,$$

also die Gleichheit für alle Lipschitz-stetigen Funktionen auf Ω . Nachdem die Familie aller Lipschitz-stetigen Funktionen (für kompaktes Ω) dicht im Raum der stetigen Funktionen $C(\Omega)$ auf Ω liegt, gilt Gleichung 4.2 sogar für alle stetige Funktionen. Anwendung des Darstellungssatzes von Riesz (siehe [3]) oder der Dichtheit von $C(\Omega)$ in $L_1(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \mu)$ und $L_1(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \nu)$ liefert daher sofort $\mu = \nu$.

Nachdem Symmetrie von δ_K unmittelbare Folgerung aus der Tatsache, dass mit $h \in Lip_1(\Omega)$ auch $-h \in Lip_1(\Omega)$ gilt, ist, bleibt nur mehr die Dreiecksungleichung zu zeigen - selbige folgt aber direkt aus

$$\begin{aligned} \delta_K(\mu, \nu) &= \sup \left\{ \int_{\Omega} h d\mu - \int_{\Omega} h d\tau + \int_{\Omega} h d\tau - \int_{\Omega} h d\nu : h \in Lip_1(\Omega) \right\} \\ &\leq \sup \left\{ \int_{\Omega} h d\mu - \int_{\Omega} h d\tau : h \in Lip_1(\Omega) \right\} + \sup \left\{ \int_{\Omega} h d\tau - \int_{\Omega} h d\nu : h \in Lip_1(\Omega) \right\} \\ &= \delta_K(\mu, \tau) + \delta_K(\tau, \nu). \end{aligned}$$

Nachdem Abschneiden bei 1 offensichtlich die Dreiecksungleichung erhält ist der Beweis komplett. \square

Als Folgerung des Satzes von Alaoglu (siehe [4]) erhalten wir das folgende sehr wichtige Resultat:

Satz 4.5. *Sei (Ω, d) kompakt. Dann ist $(\mathcal{P}(\Omega), \delta_K)$ ist kompakter metrischer Raum.*

Genauso wie \mathcal{W} eine Kontraktion auf $(\mathcal{K}(\Omega), \delta_H)$ ist, ist \mathcal{V} eine Kontraktion auf $(\mathcal{P}(\Omega), \delta_K)$:

Satz 4.6. *Sei $\{\Omega, (f_i)_{i=1}^N, (p_i)_{i=1}^N\}$ ein IFSP und (Ω, d) kompakt. Dann ist \mathcal{V} eine Kontraktion auf $(\mathcal{P}(\Omega), \delta_K)$ und hat Kontraktionsfaktor $\tilde{L} = \sum_{i=1}^N p_i L_i < 1$.*

Beweis. Seien $h \in Lip_1(\Omega)$ und $\mu, \nu \in \mathcal{P}(\Omega)$. Dann folgt via Change of Coordinates und Linearitäts des Integrals

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} h d(\mathcal{V}(\mu)) - \int_{\Omega} h d(\mathcal{V}(\nu)) &= \int_{\Omega} h d\left(\sum_{i=1}^N p_i \mu^{f_i}\right) - \int_{\Omega} h d\left(\sum_{i=1}^N p_i \nu^{f_i}\right) \\ &= \sum_{i=1}^N p_i \int_{\Omega} h d\mu^{f_i} - \sum_{i=1}^N p_i \int_{\Omega} h d\nu^{f_i} \\ &= \sum_{i=1}^N p_i \int_{\Omega} h \circ f_i d\mu - \sum_{i=1}^N p_i \int_{\Omega} h \circ f_i d\nu \\ &= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N p_i h \circ f_i d\mu - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N p_i h \circ f_i d\nu \\ &=: \int_{\Omega} \tilde{h}(x) d\mu - \int_{\Omega} \tilde{h}(x) d\nu \end{aligned}$$

mit $\tilde{h}(x) := \sum_{i=1}^N p_i h \circ f_i(x)$ für jedes $x \in \Omega$. Setzen wir $\tilde{L} = \sum_{i=1}^N p_i L_i < 1$, dann folgt

$$\begin{aligned} |\tilde{h}(x) - \tilde{h}(y)| &\leq \sum_{i=1}^N p_i |h \circ f_i(x) - h \circ f_i(y)| \leq \sum_{i=1}^N p_i d(f_i(x), f_i(y)) \\ &\leq \sum_{i=1}^N p_i L_i d(x, y) = \tilde{L} d(x, y), \end{aligned}$$

die Funktion \tilde{h} ist also eine Kontraktion mit Kontraktionsfaktor $\tilde{L} < 1$. Damit folgt $\frac{\tilde{h}}{\tilde{L}} \in Lip_1(\Omega)$ und wir erhalten

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \tilde{h}(x) d\mu - \int_{\Omega} \tilde{h}(x) d\nu &= \tilde{L} \int_{\Omega} \frac{\tilde{h}}{\tilde{L}} d\mu - \tilde{L} \int_{\Omega} \frac{\tilde{h}}{\tilde{L}} d\nu \\ &\leq \tilde{L} \delta_K(\mu, \nu). \end{aligned}$$

Insgesamt haben wir damit die folgenden Ungleichung für beliebiges $h \in Lip_1(\Omega)$ bewiesen:

$$\int_{\Omega} h d(\mathcal{V}(\mu)) - \int_{\Omega} h d(\mathcal{V}(\nu)) \leq \tilde{L} \delta_K(\mu, \nu).$$

Supremumbildung links über $h \in Lip_1(\Omega)$ liefert das gewünschte Resultat. \square

Anwendung von Satz 4.5, Satz 4.6 und dem Banach'schen FPS liefert sofort das folgende Resultat (betrachten Sie abermals die Analogie zwischen \mathcal{W} und \mathcal{V}). Um die Abhängigkeit des invarianten Maßes von der diskreten Verteilung p anzudeuten schreiben wir nachfolgend auch \mathcal{V}_p statt \mathcal{V}):

Satz 4.7. *Sei $\{\Omega, (f_i)_{i=1}^N, (p_i)_{i=1}^N\}$ ein IFSP und (Ω, d) kompakt. \mathcal{V}_p bezeichne den vom IFSP induzierten Markov Operator auf $\mathcal{P}(\Omega)$. Dann existiert ein eindeutiges $\mu_p^* \in \mathcal{P}(\Omega)$ mit*

$$\mathcal{V}_p(\mu_p^*) = \mu_p^*$$

und für alle $\mu \in \mathcal{P}(\Omega)$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_K(\mathcal{V}_p^n(\mu), \mu_p^*) = 0.$$

Aus den vorhergehenden Abschnitten wissen wir, dass die Adressabbildung G den Code Space Σ_N surjektiv und stetig auf den Attraktor A^* abbildet. Gibt es ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{B}(\Sigma_N)$, das mittels G auf μ_p^* abgebildet wird? Und wie hängt μ_p^* überhaupt mit A^* zusammen? Um die Fragen zu beantworten, kehren wir zum ursprünglichen Ausgangspunkt - dem Chaos Game - zurück, und formalisieren, wie die einzelnen Funktionen des IFSP zufällig gezogen werden: Gegeben sei das IFSP $\{\Omega, (f_i)_{i=1}^N, (p_i)_{i=1}^N\}$ auf dem kompakten metrischen Raum (Ω, d) . Wenn wir mit X_n die im n -ten Schritt gezogene Funktion (bzw. deren Index) bezeichnen, dann gilt offensichtlich

$$\mathbb{P}(X_n = i) = p_i.$$

Nach Konstruktion des Chaos Games ist die Folge $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ also i.i.d und jedes X_n hat Verteilung p . Nehmen wir an, dass die Zufallsvariablen auf einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Gamma, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ definiert sind, dann ist $\mathcal{X} = (X_1, X_2, \dots)$ offensichtlich eine Abbildung

von Γ nach Σ_N . Wir berechnen $\mathbb{P}^{\mathcal{X}} =: P_p \in \mathcal{P}(\Sigma_N)$ auf sogenannten endlichen Rechtecken und schreiben statt $\{1, \dots, N\}$ kurz $1:N$. Endliche Rechtecke R sind Mengen der Form (keine Beschränkung ab der $n+1$ -ten Koordinate)

$$R = E_1 \times \dots \times E_n \times 1:N \times 1:N \times \dots \quad (4.3)$$

mit $n \in \mathbb{N}$ und $E_i \subseteq 1:N$ für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$. Offensichtlich gilt dann

$$\mathbb{P}^{\mathcal{X}}(R) = \mathbb{P}\{X_1 \in E_1, X_2 \in E_2, \dots, X_n \in E_n\} = \prod_{i=1}^n p(E_i),$$

$\mathbb{P}^{\mathcal{X}}$ ist also das abzählbare Produktmaß von $\mathbb{P}^{X_1} = p$. Falls das Produktmaß nicht aus der Maßtheorie bekannt ist, kann $\mathbb{P}^{\mathcal{X}}$ auch alternativ wie folgt mit standard maßtheoretischen Methoden konstruiert werden: Setzen wir

$$\mathfrak{h}_N := \left\{ R \subseteq \Sigma_N : \text{es existieren } n \in \mathbb{N} \text{ und } E_1, \dots, E_n \subseteq 1:N \text{ mit} \right. \\ \left. R = E_1 \times \dots \times E_n \times 1:N \times 1:N \times \dots \right\}, \quad (4.4)$$

und definieren $P_p : \mathfrak{h}_N \rightarrow [0, 1]$ durch

$$P_p(E_1 \times \dots \times E_n \times 1:N \times 1:N \times \dots) = \prod_{i=1}^n p(E_i), \quad (4.5)$$

dann gilt folgendes Resultat:

Lemma 4.8. *Die Familie \mathfrak{h}_N ist ein Halbring in Σ_N , der die Borel'sche σ -Algebra $\mathcal{B}(\Sigma_N)$ erzeugt. Alle Mengen in \mathfrak{h}_N sind clopen. Zusätzlich ist durch Gleichung (4.5) ein eindeutiges Wahrscheinlichkeitsmaß P_p auf $\mathcal{B}(\Sigma_N)$ definiert, das mit der Verteilung von \mathcal{X} übereinstimmt, i.e., es gilt $\mathbb{P}^{\mathcal{X}}(B) = P_p(B)$ für jedes $B \in \mathcal{B}(\Sigma_N)$.*

Beweis. Gute Übungsaufgabe. □

Bevor wir P_p^G studieren beweisen wir, erstens, noch ein Resultat, das am Ende der Vorlesung wichtig für den Beweis des Ergodensatzes für das Chaos Game sein wird, und, zweitens, ergänzen/wiederholen die Definition des Trägers eines Maßes:

Lemma 4.9. *Sei $\{\Omega, (f_i)_{i=1}^N, (p_i)_{i=1}^N\}$ ein IFSP und P_p das entsprechende Produktmaß auf $\mathcal{B}(\Sigma_N)$. Dann ist der Linksshiftoperator P_p -treu, i.e., es gilt $P_p^\sigma = P_p$.*

Beweis. Um $P_p^\sigma = P_p$ zu zeigen genügt es (als direkte Konsequenz von Lemma 4.8 und dem Fortsetzungssatz von Caratheodory), die Gleichheit $P_p^\sigma(R) = P_p(R)$ für alle $R \in \mathfrak{h}_N$ nachzurechnen, was wie folgt gemacht werden kann:

$$P_p^\sigma(R) = P_p(\sigma^{-1}(R)) = P_p(\{\underline{k} \in \Sigma_N : \sigma(\underline{k}) \in R\}) = P_p(1:N \times R) \\ = 1 \cdot \prod_{i=1}^n p(E_i) = P_p(R)$$

□

Definition 4.10. Sei (Ω, d) ein (beliebiger) metrischer Raum und $\mu \in \mathcal{P}(\Omega)$. Dann ist der Träger von μ definiert durch

$$Tr(\mu) := \{x \in \Omega : \mu(B(x, r)) > 0 \text{ für jedes } r > 0\}$$

Beispiel 4.11. Die folgenden Aussagen sind leicht zu verifizieren:

1. Für das Lebesgue Maß λ auf $\mathcal{B}([0, 1])$ gilt $Tr(\lambda) = [0, 1]$.
2. $Tr(\delta_{\{z_0\}}) = \{z_0\}$.
3. Für $\mathbb{Q} \cap [0, 1] = \{q_1, q_2, \dots\}$ und das Wahrscheinlichkeitsmaß

$$\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \delta_{\{q_i\}}$$

gilt $Tr(\mu) = [0, 1]$.

Lemma 4.12. Sei (Ω, d) ein (beliebiger) metrischer Raum und $\mu \in \mathcal{P}(\Omega)$. Dann ist $Tr(\mu)$ abgeschlossen. Für kompaktes (Ω, d) gilt $Tr(\mu) \in \mathcal{K}(\Omega)$.

Beweis. Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine gegen $x \in \Omega$ konvergente Folge in $Tr(\mu)$ und $r > 0$ beliebig. Dann existiert ein Index $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in B(x, r)$ für alle $n \geq n_0$. Für ein hinreichend kleines $\delta > 0$ gilt offensichtlich $B(x_{n_0}, \delta) \subseteq B(x, r)$ und damit

$$0 < \mu(B(x_{n_0}, \delta)) \leq \mu(B(x, r)),$$

also $x \in Tr(\mu)$. Die zweite Aussage folgt aus der Tatsache, dass abgeschlossene Teilmengen kompakter Mengen ebenfalls kompakt sind. \square

Bemerkung 4.13. Der Träger $Tr(\mu)$ kann äquivalenterweise auch definiert werden als die kleinste abgeschlossene Menge M mit $\mu(M) = 1$.

Der folgende Satz klärt den Zusammenhang der Fixpunkte A^* und μ_p^* von \mathcal{W} und \mathcal{V}_p :

Satz 4.14. Sei (Ω, d) ein kompakter metrischer Raum, $\{\Omega, (f_i)_{i=1}^N, (p_i)_{i=1}^N\}$ ein IFSP und $\mathcal{V}_p : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow \mathcal{P}(\Omega)$ der induzierte Markov Operator. Dann gilt

$$Tr(\mu_p^*) = A^*.$$

Beweis. Wir zeigen die Gleichheit $Tr(\mathcal{V}_p(\mu)) = \mathcal{W}(Tr(\mu))$ für ein beliebiges $\mu \in \mathcal{P}(\Omega)$ und beginnen mit der ersten Inklusion \subseteq :

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_p(\mu)(\underbrace{\mathcal{W}(Tr(\mu))}_{\in \mathcal{K}(\Omega) \subseteq \mathcal{B}(\Omega)}) &= \sum_{i=1}^N p_i \mu^{f_i}(\mathcal{W}(Tr(\mu))) = \sum_{i=1}^N p_i \mu(f_i^{-1}(\mathcal{W}(Tr(\mu)))) \\ &= \sum_{i=1}^N p_i \mu \left(\underbrace{f_i^{-1} \left(\bigcup_{j=1}^N f_j(Tr(\mu)) \right)}_{\supseteq f_i^{-1}(f_i(Tr(\mu)))} \right) \\ &\geq \sum_{i=1}^N p_i \mu(Tr(\mu)) = 1. \end{aligned}$$

Die kompakte Menge $\mathcal{W}(Tr(\mu))$ hat also volle μ -Masse, Anwendung von Bemerkung 4.13 liefert daher sofort $\mathcal{W}(Tr(\mu)) \supseteq Tr(\mathcal{V}_p(\mu))$.

Für den Beweis der zweiten Inklusion genügt es zu zeigen, dass aus $x \notin Tr(\mathcal{V}_p(\mu))$ sofort $x \notin \mathcal{W}(Tr(\mu))$ folgt. Für $x \notin Tr(\mathcal{V}_p(\mu))$ folgt die Existenz eines $r > 0$ mit

$$0 = \mathcal{V}_p(\mu)(B(x, r)) = \sum_{i=1}^N p_i \mu^{f_i}(B(x, r)),$$

und damit

$$\mu \left(\bigcup_{i=1}^N f_i^{-1}(B(x, r)) \right) = 0.$$

Daraus ergibt sich abermals via Bemerkung 4.13

$$Tr(\mu) \subseteq \underbrace{\left(\bigcup_{i=1}^N f_i^{-1}(B(x, r)) \right)^c}_{=\bigcap_{i=1}^N f_i^{-1}(B(x, r))^c}$$

und wir erhalten schließlich

$$\mathcal{W}(Tr(\mu)) \subseteq \mathcal{W} \left(\bigcap_{i=1}^N f_i^{-1}(B(x, r)^c) \right) \subseteq B(x, r)^c,$$

also $x \notin \mathcal{W}(Tr(\mu))$.

Insgesamt haben wir damit $Tr(\mathcal{V}_p(\mu)) = \mathcal{W}(Tr(\mu))$ für beliebiges $\mu \in \mathcal{P}(\Omega)$ bewiesen. Betrachten wir nun speziell $\mu := \mu_p^*$ dann erhalten wir sofort

$$Tr(\mu_p^*) = Tr(\mathcal{V}_p(\mu_p^*)) = \mathcal{W}(Tr(\mu_p^*))$$

$Tr(\mu_p^*) \in \mathcal{K}(\Omega)$ ist also ein Fixpunkt von \mathcal{W} und muss daher mit A^* übereinstimmen. \square

Satz 4.15. Sei (Ω, d) ein kompakter metrischer Raum, $\{\Omega, (f_i)_{i=1}^N, (p_i)_{i=1}^N\}$ ein IFSP, $\mathcal{V}_p : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow \mathcal{P}(\Omega)$ der induzierte Markov Operator, und $G : \Sigma_N \rightarrow A^*$ die Adressabbildung. Dann gilt

$$P_p^G = \mu_p^*.$$

Beweis. Wir zeigen $\mathcal{V}_p(P_p^G) = P_p^G$, aus der Eindeutigkeit des Fixpunkts von \mathcal{V}_p folgt dann sofort $P_p^G = \mu_p^*$.

Wir definieren den i -Rechtsshiftoperator $\tau_i : \Sigma_N \rightarrow \Sigma_N$ durch $(k_1 k_2 k_3 \dots) \mapsto (i k_1 k_2 k_3 \dots)$. Dann ist τ_i offensichtlich (für jedes $i \in \{1, \dots, N\}$) Lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante $\frac{1}{2}$. Weiters gilt offensichtlich für jedes $i \in \{1, \dots, N\}$ und jedes $B \in \mathcal{B}(\Omega)$

$$\begin{aligned} G^{-1}(f_i^{-1}(B)) &= (f_i \circ G)^{-1}(B) = \{\underline{k} \in \Sigma_N : f_i \circ G(\underline{k}) \in B\} \\ &= \{\underline{k} \in \Sigma_N : G \circ \tau_i(\underline{k}) \in B\} = \tau_i^{-1}(G^{-1}(B)), \end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_p(P_p^G)(B) &= \sum_{i=1}^N p_i(P_p^G)^{f_i}(B) = \sum_{i=1}^N p_i(P_p^G)(f_i^{-1}(B)) \\
&= \sum_{i=1}^N p_i(P_p)(G^{-1}(f_i^{-1}(B))) = \sum_{i=1}^N p_i P_p(\tau_i^{-1}(G^{-1}(B))) \\
&= \sum_{i=1}^N p_i P_p^{\tau_i}(G^{-1}(B)) = P_p(G^{-1}(B)) = P_p^G(B),
\end{aligned}$$

wobei in der vorletzten Umformung die Gleichheit $\sum_{i=1}^N p_i P_p^{\tau_i} = P_p$ verwendet wurde, die sich für endliche Rechtecke $R \in \mathfrak{h}_N$ einfach nachrechnen, und dann via Caratheodory auf ganz $\mathcal{B}(\Sigma_N)$ erweitern lässt. \square

4.2 Ergodizität des Chaos Games

Ziel der VO war es zu verstehen, warum das Chaos Game das tut, was es tut, nämlich den Attraktor zu ‘erzeugen’ (siehe Motivation_Fraktale.pdf). Mit den bisher erarbeiteten Grundlagen sind wir nun (unter Zuhilfenahme zweiter Resultate aus der VO *Einführung in die Ergodentheorie*) in der Lage, zu zeigen, dass das Chaos Game de facto nicht nur den Attraktor A^* , sondern das invariante Maß μ_p^* (und damit wegen $Tr(\mu_p^*) = A^*$ auch den Attraktor) zum Vorschein bringt. Wir starten mit einer formal sauberen Beschreibung des Chaos Games als Markov Prozess, wiederholen die Hilfsresultate aus der Ergodentheorie und beweisen dann elegant das Hauptresultat, in dem wir sowohl die Adressabbildung G als auch das Produktmaß auf den symmetrischen Codespace $\hat{\Sigma}_N = \{1, \dots, N\}^{\mathbb{Z}}$ erweitern.

Wie bisher in Abschnitt 4 nehmen wir wiederum an, dass (Ω, d) ein kompakter metrischer Raum und $\{\Omega, (f_i)_{i=1}^N, (p_i)_{i=1}^N\}$ ein IFSP ist. Gemäß den R-Codes funktioniert das Chaos Game so, dass wir einen Startpunkt $z_0 \in \Omega$ wählen, dann jeweils schrittweise Funktionen f_{k_1}, f_{k_2}, \dots bzw. Indices k_1, k_2, \dots gemäß diskreter Verteilung p ziehen, und die Punkte $z_1 = f_{k_1}(z_0), z_2 = f_{k_2}(z_1), \dots$ betrachten. Mit anderen Worten: Wir ziehen gemäß Produktmaß P_p zufällig ein Element $\underline{k} \in \Sigma_N$ und definieren dann eine Folge $(Y_n^{z_0})_{n \in \mathbb{N}}$ von Ω -wertigen Zufallsvariablen $Y_n^{z_0}$ auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Sigma_N, \mathcal{B}(\Sigma_N), P_p)$ durch

$$\begin{aligned}
Y_1^{z_0}(\underline{k}) &= f_{k_1}(z_0) \\
Y_2^{z_0}(\underline{k}) &= f_{k_2}(z_1) = f_{k_2} \circ f_{k_1}(z_0) \\
Y_3^{z_0}(\underline{k}) &= f_{k_3}(z_2) = f_{k_3} \circ f_{k_2} \circ f_{k_1}(z_0) \\
&\vdots \\
Y_n^{z_0}(\underline{k}) &= f_{k_n}(z_n) = f_{k_n} \circ f_{k_{n-1}} \circ \dots \circ f_{k_3} \circ f_{k_2} \circ f_{k_1}(z_0).
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Beachten Sie, dass die Reihenfolge, in der die Funktionen verkettet werden, genau umgekehrt zu jener in der Definition von G ist (wie wir gleich sehen werden ist genau diese Tatsache auch der Grund für die Betrachtung von $\hat{\Sigma}_N = \{1, \dots, N\}^{\mathbb{Z}}$).

Definition 4.16. Sei (Ω, d) ein kompakter metrischer Raum, $\{\Omega, (f_i)_{i=1}^N, (p_i)_{i=1}^N\}$ ein IFSP und $z_0 \in \Omega$. Dann heißt die durch Gleichung (4.6) definierte Folge $(Y_n^{z_0})_{n \in \mathbb{N}}$ von Ω -wertigen

Zufallsvariablen $Y_n^{z_0}$ auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Sigma_N, \mathcal{B}(\Sigma_N), P_p)$ das (vom IFSP) induzierte Chaos Game mit Startwert z_0 .

Bemerkung 4.17. Formal ist das Chaos Game also nicht anderes als ein spezieller Markov Prozess in diskreter Zeit mit Zustandsraum Ω (siehe VO Markov Prozesse).

Die am Beginn der VO für das das Sieprinski Dreieck erzeugende IFSP gemachte Beobachtung (wie groß ist der Anteil der Punkt im unteren linken Dreieck) lässt sich nun wie folgt konkretisieren und verallgemeinern: Für jedes $B \in \mathcal{B}(\Omega)$ gilt die folgende Gleichheit:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_B(Y_i^{z_0}(\underline{k})) = \mu_p^*(B) \quad (4.7)$$

Mit anderen Worten: Die relative asymptotische Zeit, die der Prozess in B verbringt, entspricht genau $\mu_p^*(B)$. Gleichung (4.7) kann offensichtlich nicht für jedes $\underline{k} \in \Sigma_N$ gelten - beispielsweise konvergiert die Folge $(Y_n^{z_0}(\underline{k}))_{n \in \mathbb{N}}$ im Falle des Sierpinski Dreiecks und der Wahl $\underline{k} = (1, 1, 1, \dots)$ für jedes z_0 gegen $(0, 0)$ - sie gilt aber für P_p -fast jedes \underline{k} . Wir können nun das folgende Hauptresultat formulieren und in mehreren Schritten beweisen:

Satz 4.18 (Ergodensatz für das Chaos Game [2]). *Sei (Ω, d) ein kompakter metrischer Raum und $\{\Omega, (f_i)_{i=1}^N, (p_i)_{i=1}^N\}$ ein IFSP. Dann gilt für μ_p^* -fast jedes $z_0 \in \Omega$ und P_p -fast jedes \underline{k} die folgende Gleichheit[†] für jedes $h \in L_1(\mu_p^*)$:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h(Y_n^{z_0}(\underline{k})) = \int_{\Omega} h d\mu_p^* \quad (4.8)$$

Beachten Sie, dass Gleichung (4.11) Gleichung (4.7) impliziert, da offensichtlich $\mathbf{1}_B \in L_1(\mu_p^*)$ für jedes $B \in \mathcal{B}(\Omega)$.

Bevor wir den erweiterten Codespace betrachten und die Hilfsresultate aus der Ergodentheorie diskutieren eine kurze Vorüberlegung, die der Ausgangspunkt für den Beweis von Satz 4.18 und auf natürliche Weise die Miteinbeziehung von $\hat{\Sigma}_N = \{1, \dots, N\}^{\mathbb{Z}}$ motiviert. Sei $(Y_n^{z_0})_{n \in \mathbb{N}}$ das Chaos Game gemäß Gleichung (4.6). Wählen wir den Startwert z_0 aus A^* (warum ist das keine Einschränkung?), dann existiert (mindestens) ein $\underline{l} \in \Sigma_N$ mit $G(\underline{l}) = z_0$ und wir erhalten für jedes $n \in \mathbb{N}$ sofort ($x_0 \in \Omega$ beliebig)

$$\begin{aligned} Y_n^{z_0}(\underline{k}) &= Y_n^{G(\underline{l})}(\underline{k}) = f_{k_n} \circ f_{k_{n-1}} \circ \dots \circ f_{k_3} \circ f_{k_2} \circ f_{k_1}(G(\underline{l})) \\ &= f_{k_n} \circ f_{k_{n-1}} \circ \dots \circ f_{k_3} \circ f_{k_2} \circ f_{k_1} \left(\lim_{m \rightarrow \infty} f_{l_1} \circ f_{l_2} \circ \dots \circ f_{l_m}(x_0) \right) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} f_{k_n} \circ f_{k_{n-1}} \circ \dots \circ f_{k_3} \circ f_{k_2} \circ f_{k_1} \circ f_{l_1} \circ f_{l_2} \circ \dots \circ f_{l_m}(x_0) \\ &= G((k_n, k_{n-1}, \dots, k_1, l_1, l_2, \dots, l_m, \dots)), \end{aligned} \quad (4.9)$$

i.e., $Y_n^{z_0}(\underline{k})$ lässt sich schreiben als die Adressmap angewandt auf ein Element von $\hat{\Sigma}_N = \{1, \dots, N\}^{\mathbb{Z}}$. Wir betrachten daher im Folgenden $\hat{\Sigma}_N$ sowie die entsprechenden (gelifteten[†]) Objekte $\hat{P}_p \in \mathcal{P}(\hat{\Sigma}_N)$ und $\hat{G} : \hat{\Sigma}_N \rightarrow A^*$:

[†] die Einsmengen hängen NICHT von h ab

[†] alle gelifteten Objekte tragen Hut

(i) $\hat{\Sigma}_N$ ist definiert durch

$$\hat{\Sigma}_N = \{1, \dots, N\}^{\mathbb{Z}} = \{(\dots, k_{-3}, k_{-2}, k_{-1}, k_1, k_2, k_3, \dots) : k_i \in \{1, \dots, N\}\}.$$

Wir schreiben (slightly misusing Notation) in der Folge auch kurz

$$(\underline{l}, \underline{k}) = (\dots, l_3, l_2, l_1, k_1, k_2, k_3, \dots),$$

wobei der Punkt die erste Stelle (erste Koordinate) markiert. Für $(\underline{l}, \underline{k}), (\underline{v}, \underline{u}) \in \hat{\Sigma}_N$ kann eine Metrik $\hat{\rho}$ direkt über $\hat{\rho}((\underline{l}, \underline{k}), (\underline{v}, \underline{u})) := \rho(\underline{l}, \underline{v}) + \rho(\underline{k}, \underline{u})$ definiert werden, die die Produkttopologie metrisiert (Konvergenz bzgl. $\hat{\rho}$ entspricht also der koordinatenweisen Konvergenz).

(ii) Das Produktmaß \hat{P}_p auf $\mathcal{B}(\hat{\Sigma}_N)$ ist analog zu P_p definiert, also entweder als Verteilung der Zufallsvariable $\hat{\mathcal{X}} = (\dots, X_{-2}, X_{-1}, X_1, X_2, \dots)$, wobei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(X_{-n})_{n \in \mathbb{N}}$ unabhängige i.i.d. Folgen mit Verteilung p sind, oder (äquivalent dazu) als das eindeutige Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{B}(\hat{\Sigma}_N)$, das auf Mengen \hat{R} der Form

$$\hat{R} = \dots \times 1:N \times 1:N \times E_{-n} \times \dots \times E_{-1} \times \dot{E}_1 \times \dots \times E_n \times 1:N \times 1:N \times \dots$$

definiert ist durch

$$P_p(\hat{R}) = \prod_{i=-n}^n p(E_i).$$

(iii) Die geliftete Adressabbildung $\hat{G} : \hat{\Sigma}_N \rightarrow A^*$ definieren wir einfach durch

$$\hat{G}((\underline{l}, \underline{k})) := G(\underline{l}).$$

Bezeichnet $\hat{\sigma}$ den Linksshiftoperator auf $\hat{\Sigma}_N$, dann gilt daher gemäß Gleichung (4.9)

$$Y_n^{z_0}(\underline{k}) = G((k_n, k_{n-1}, \dots, k_1, l_1, l_2, \dots, l_m, \dots)) = \hat{G}(\hat{\sigma}^n((\underline{l}, \underline{k}))) \quad (4.10)$$

Die folgenden zwei Resultate sind Grundwissen aus Ergodentheorie (siehe VO *Einführung in die Ergodentheorie*).

Lemma 4.19. *Der Linksshiftoperator $\hat{\sigma} : \hat{\Sigma}_N \rightarrow \hat{\Sigma}_N$ ist ergodisch bezügl. \hat{P}_p , i.e., es gilt $\hat{P}_p^{\hat{\sigma}} = \hat{P}_p$ und jede Menge $G \in \mathcal{B}(\hat{\Sigma}_N)$ mit $\hat{\sigma}^{-1}(G) = G$ erfüllt $\hat{P}_p(G) \in \{0, 1\}$.*

Satz 4.20 (Birkhoff'scher Ergodensatz). *Ist T eine ergodische Transformation auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Gamma, \mathcal{A}, \mu)$, dann existiert eine Einsmenge $E \in \mathcal{A}$ sodass für jedes $x \in E$ und jedes $h \in L_1(\Gamma)$ die folgende Gleichheit gilt:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h(T^i(x)) = \int_{\Gamma} h d\mu$$

Damit können wir nun den Ergodensatz für das Chaos Game elegant und kurz beweisen:

Beweis von Satz 4.18. (Schritt 1): Sei $h \in L_1(\mu_p^*)$. Dann liefert Change-of-Coordinates sofort die Gleichheit

$$\int_{A^*} h d\mu_p^* = \int_{\Omega} h d\mu_p^* = \int_{\Omega} h d\hat{P}_p^{\hat{G}} = \int_{\hat{\Sigma}_N} h \circ \hat{G} d\hat{P}_p,$$

und wir erhalten $h \circ \hat{G} \in L_1(\hat{P}_p)$.

(Schritt 2) Anwendung des Birkhoff'schen Ergodensatzes und Lemma 4.19 liefert daher sofort die Existenz einer Menge $\hat{\Lambda} \in \mathcal{B}(\hat{\Sigma}_N)$ mit $\hat{P}_p(\hat{\Lambda}) = 1$ sodass für jedes $(\underline{l}, \underline{k}) \in \hat{\Lambda}$ die folgende Gleichheit gilt (der Ergodensatz geht in der dritten Gleichheit ein):

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h \left(Y_i^{G(\underline{l})}(\underline{k}) \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h \left(\hat{G} \circ \hat{\sigma}^i((\underline{l}, \underline{k})) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \underbrace{h \circ \hat{G}}_{\in L_1(\hat{P}_p)} \left(\hat{\sigma}^i((\underline{l}, \underline{k})) \right) = \int_{\hat{\Sigma}_N} h \circ \hat{G} d\hat{P}_p \\ &= \int_{\Omega} h d\hat{P}_p^{\hat{G}} = \int_{\Omega} h d\mu_p^* \end{aligned}$$

□

Wenn man bereit ist, sich auf stetige Funktionen einzuschränken, ist es sogar möglich, ein analoges Resultat für JEDES $z_0 \in \Omega$ zu beweisen (siehe [2]):

Satz 4.21 (Ergodensatz 2 für das Chaos Game [2]). *Sei (Ω, d) ein kompakter metrischer Raum und $\{\Omega, (f_i)_{i=1}^N, (p_i)_{i=1}^N\}$ ein IFSP. Dann gilt für jedes (!) $z_0 \in \Omega$ und P_p -fast jedes \underline{k} die folgende Gleichheit[†] für jedes stetige $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h(Y_n^{z_0}(\underline{k})) = \int_{\Omega} h d\mu_p^* \quad (4.11)$$

[†]die Einsmenge hängt NICHT von h ab

Literatur

- [1] M.F. Barnsley: *Fractals everywhere*, Academic Press, Cambridge, 1993
- [2] H. Kunze, D. La Torre, F. Mendivil, E.R. Vrscay: *Fractal Based Methods in Analysis*, Springer, New York Dordrecht Heidelberg London, 2012.
- [3] W. Rudin: *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill International Editions, Singapore, 1987
- [4] W. Rudin: *Functional Analysis*, McGraw-Hill, 1991